CORRIGÉ CONCOURS BLANC 1

Exercice 1 –

1. $A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6-2+3}{6} = \frac{7}{6}$
2. $B = 3\left(1 - \frac{1}{5}\right) + 2 \times \frac{3}{7} = 3 \times \left(\frac{5}{5} - \frac{1}{5}\right) + \frac{6}{7} = 3 \times \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{12}{5} + \frac{6}{7} = \frac{84}{35} + \frac{30}{35} = \frac{114}{35}$
3. $C = \dfrac{1+\frac{1}{3}}{\frac{2}{7} + 3\left(2 - \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{7} + 3 \times \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{3+1}{3}}{\frac{2}{7} + \frac{9}{2}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{14} + \frac{63}{14}} = \frac{4}{3} \times \frac{14}{67} = \frac{56}{201}$
4. $D = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3}\right) \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) \times \left(\frac{3}{12} - \frac{16}{12}\right) \div \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \times \left(-\frac{13}{12}\right) \times 2 = \frac{13}{36}$

Exercice 2 –

1. Je résous : $2x - 4 = 1 \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.
2. Je résous : $x + 3 \leqslant 2x - 1 \iff -x \leqslant -4 \iff x \geqslant 4$ donc $\mathcal{S} = [4, +\infty[$.
3. Je me ramène à une étude de signe :

$$\frac{x+2}{x-3} \leqslant 3 \iff \frac{(x+2) - 3(x-3)}{x-3} \leqslant 0 \iff \frac{-2x+11}{x-3} \leqslant 0.$$

J'établis désormais le tableau de signe de $\dfrac{-2x+11}{x-3}$:

x	$-\infty$		3		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$-2x+11$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x+11}{x-3}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{S} =]-\infty, 3[\cup \left[\frac{11}{2}, +\infty\right[$.

4. Je commence par chercher les éventuelles valeurs interdites : $x - 2 = 0 \iff x = 2$.
Ensuite, $4x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{4}$. Cette valeur ne fait pas partie des valeurs interdites.
Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
5. Je calcule le discriminant du polynôme : $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100 - 96 = 4 = 2^2 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{10-2}{2 \times 2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10+2}{2 \times 2} = 3.$$

Donc $\mathcal{S} = \{2, 3\}$.

6. Je calcule le discriminant du polynôme : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines

$$x_1 = \frac{2-4}{2 \times (-1)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2 \times (-1)} = -3.$$

   J'établis le tableau de signe de $-x^2 - 2x + 3$:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc $\mathcal{S} =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.

7. Je pose $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$. Comme $P(-1) = -6 + 7 + 1 - 2 = 0$, alors -1 est une racine du polynôme $P(x)$ et donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = \big(x - (-1)\big)Q(x) = (x+1)Q(x)$.
   Je détermine le polynôme $Q(x)$ par division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 6x^3 & + & 7x^2 & - & x & - & 2 & & x+1 \\ \cline{10-10}
- & (6x^3 & + & 6x^2) & & & & & & 6x^2 + x - 2 \\ \cline{2-8}
 & & & x^2 & - & x & - & 2 & & \\
 & & - & (x^2 & + & x) & & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & - & 2x & - & 2 & & \\
 & & & - & (- & 2x & - & 2) & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

   Finalement j'obtiens que $P(x) = (x+1)\big(6x^2 + x - 2\big)$.
   Je calcule maintenant le discriminant du facteur de degré 2 :
   $\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 = 7^2 > 0$. Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-1-7}{2 \times 6} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

   Donc $\mathcal{S} = \left\{-1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

Exercice 3 –

1. La fonction a est une fonction polynomiale donc a est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction b est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $4x - 1 = 0 \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}$. Donc b est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.
3. La fonction c est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1^2 > 0$.
   Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

   Donc c est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

4. La fonction d est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 - 2x - 3$. Il me faut résoudre $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$.
   Je calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
   Il y a donc deux racines
   $$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$
   J'établis alors le tableau de signe de $u(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc d est définie sur $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$.

5. La fonction e est une somme, de la forme $e_1 + e_2$ avec $e_1(x) = \dfrac{1}{x}$ et $e_2(x) = 4x - 5$.
   e_1 est la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}^*$ et e_2 est une fonction polynomiale, définie sur $\mathbb{R}$.
   Donc e est définie sur l'intersection $\mathbb{R}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^*$.
6. La fonction f est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{2x-1}{-x+3}$. Il me faut donc résoudre $\dfrac{2x-1}{-x+3} \geqslant 0$.
   J'établis le tableau de signe de $u(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x-1}{-x+3}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

   Donc f est définie sur $\left[\dfrac{1}{2}, 3\right[$.

Exercice 4 –

1. La fonction f est une fraction rationnelle dont je cherche les valeurs interdites. Celles-ci sont les solutions de $2x - 3 = 0 \iff 2x = 3 \iff x = \dfrac{3}{2}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
   La fonction g est une fonction polynomiale donc g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ qui n'est pas symétrique par rapport à 0. Donc f ne peut être ni paire, ni impaire. g en revanche est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0.
   Je calcule alors $g(-x)$: $g(-x) = 2(-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3 = g(x)$. Donc g est paire.

Exercice 5 –

1. Par lecture graphique, j'obtiens le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Par lecture graphique, j'obtiens le tableau de signe de la fonction g :

x	$-\infty$		-4		6		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. (a) Je développe la forme factorisée donnée par l'énoncé afin de retomber sur la définition de $f(x)$:

$$\frac{(x+4)(x-2)^2}{16} = \frac{x^3-4x^2+4x+4x^2-16x+16}{16} = \frac{x^3-12x+16}{16} = \frac{x^3}{16} - \frac{3}{4}x + 1 = f(x).$$

J'ai bien montré que pour tout réel x, $\quad f(x) = \dfrac{(x+4)(x-2)^2}{16}$.

(b) J'étudie le signe de $f(x)$ grâce à la forme factorisée. Un carré est toujours positif et 16 est un nombre strictement positif, donc j'établis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

3. Je commence par calculer le discriminant : $\Delta = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\times\left(-\frac{1}{8}\right)\times 3 = \frac{1}{16} + \frac{12}{8} = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 > 0$.

Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}{-\frac{2}{8}} = -\frac{6}{4}\times\left(-\frac{8}{2}\right) = 6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}{-\frac{2}{8}} = -4.$$

Je déduis donc la factorisation de $g(x)$:

$$g(x) = -\frac{1}{8}\times(x+4)(x-6) = -\frac{(x+4)(x-6)}{8}.$$

4. (a) Grâce aux deux factorisations trouvées précédemment pour $f(x)$ et $g(x)$, alors je peux écrire pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= \frac{(x+4)(x-2)^2}{16} - \frac{-(x+4)(x-6)}{8} = \frac{(x+4)\big((x-2)^2+2x-12\big)}{16} \\ &= \frac{(x+4)\big(x^2-4x+4+2x-12\big)}{16} = \frac{(x+4)\big(x^2-2x-8\big)}{16}. \end{aligned}$$

(b) Puisque $f(x) \leqslant g(x) \iff f(x)-g(x) \leqslant 0$, il me faut étudier le signe de $f(x)-g(x)$.
J'utilise l'expression établie à la question précédente et m'intéresse au facteur de degré 2.
Le discriminant de x^2-2x-8 vaut $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times(-8) = 4+32 = 36 = 6^2 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Je peux alors établir le tableau de signe de $f(x)-g(x)$:

x	$-\infty$		-4		-2		4		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-2x-8		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ se trouvent dans $\mathcal{S} = \big]-\infty,-4\big] \cup \big[-2,4\big]$.

5. Le tableau de signe de f obtenu à la question **2.a)** est bien cohérent avec le graphique fourni. Aussi, en accord avec la question **4.b)**, la courbe $\mathcal{C}_f$ est bien en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $\big]-\infty,-4\big] \cup \big[-2,4\big]$ et au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\big[-4,-2\big] \cup \big[4,+\infty\big[$. Ceci est également cohérent avec le graphique fourni.

Exercice 6 –

1. Graphiquement, j'obtiens que :
   (a) $f(0) = -6$,
   (b) l'image de 3 par f est $f(3) = 0$,
   (c) les antécédents de -4 par f sont -1 et 2,
   (d) l'unique antécédent de 10 par f est 4.5,
   (e) les antécédents de -6 par f sont 0 et 1,
   (f) l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 5 est 14,
   (g) les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont -2.5 et 3.5.
2. Je remplace x par $\dfrac{1}{2}$ dans la formule de $f(x)$ et j'obtiens

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{25}{4}.$$

3. Je développe le produit donné dans le but de retrouver la définition de $f(x)$:

$$(x-3)(x+2) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6 = f(x).$$

4. Grâce à la question précédente,

$$f(x) = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0 \iff x-3 = 0 \text{ ou } x+2 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

   Je retrouve donc bien le fait que les antécédents de 0 par f sont -2 et 3.

Exercice 7 –

1. FAUX, $\big[-1,-3\big]$ n'a même pas de sens mathématique.
2. FAUX, $\big[5,2\big]$ n'a même pas de sens mathématique.
3. VRAI, la flèche monte de 2 à 4 sur cet intervalle.
4. VRAI, -3 est le minimum de f sur $\big[-5,12\big]$.
5. FAUX, puisque le minimum de f sur $\big[-5,12\big]$ est -3.
6. VRAI, puisque $f(9) = 2 < 4 < 5 = f(4)$ et que f est décroissante sur $\big[4,9\big]$.
7. VRAI, puisque $f(12) = 4$ et que f est croissante sur $\big[9,12\big]$.

Exercice 8 –

1. Je remplace n par les valeurs dans la définition de u_n :

$$u_0 = \frac{3\times 0+4}{0+1} = \frac{4}{1} = 4, \qquad u_1 = \frac{3+4}{1+1} = \frac{7}{2}, \qquad u_2 = \frac{6+4}{2+1} = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{9+4}{3+1} = \frac{13}{4}.$$

2. Pour les expressions suivantes, j'obtiens

$$\begin{aligned}
u_{n-1} &= \frac{3(n-1)+4}{n-1+1} = \frac{3n-3+4}{n} = \frac{3n+1}{n},\\
u_n - 1 &= \frac{3n+4}{n+1} - 1 = \frac{3n+4}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+1},\\
u_{n+2} &= \frac{3(n+2)+4}{n+2+1} = \frac{3n+6+4}{n+3} = \frac{3n+10}{n+3},\\
u_n + 2 &= \frac{3n+4}{n+1} + 2 = \frac{3n+4}{n+1} + \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{3n+4+2n+2}{n+1} = \frac{5n+6}{n+1},\\
u_{2n-1} &= \frac{3(2n-1)+4}{2n-1+1} = \frac{6n-3+4}{2n} = \frac{6n+1}{2n},\\
2u_n - 1 &= 2\times\frac{3n+4}{n+1} - 1 = \frac{6n+8}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{5n+7}{n+1},\\
u_{2n} - 1 &= \frac{3\times 2n+4}{2n+1} - 1 = \frac{6n+4}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n+1} = \frac{4n+3}{2n+1}.
\end{aligned}$$

3. Le terme d'indice $n+1$ est donné par

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)+4}{n+1+1} = \frac{3n+3+4}{n+2} = \frac{3n+7}{n+2}.$$

Exercice 9 –

1. On a : $\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 5x + 6 = 3^2 - 5\times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$.

2. On décompose :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} 3 = 3\\ &\lim_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty \end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{par quotient}\\ \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2x-1} = 0^+\end{gathered}$$

3. On décompose :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} 3 = 3\\ &\lim_{x\to 2^+} x-2 = 0^+ \end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{par quotient}\\ \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty\end{gathered}$$

4. On décompose :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\\ &\lim_{x\to+\infty} 2 = 2 \end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{par somme}\\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 2 = 2\end{gathered}$$

5. On décompose :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3^-} 1 = 1\\ &\lim_{x\to 3^-} 3-x = 0^+ \end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{par quotient}\\ \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3-x} = +\infty\end{gathered}$$

D'où :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3-x} = +\infty\\ &\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{aligned}\right\} \begin{gathered}\text{par composition}\\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{3-x}} = +\infty\end{gathered}$$

6. On décompose :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}-1=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^3+1=-\infty\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par produit}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\times\left(x^3+1\right)=+\infty\end{array}$$

7. On décompose :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}x^2+2x-3=-3\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}+x^2+2x-3=+\infty\end{array}$$

Exercice 10 –

1. $p_1=P(G_1)$ donc p_1 correspond à la probabilité que Jean-Pierre gagne la première partie. D'après l'énoncé, on a $p_1=\frac{1}{3}$.
2. On a : $P_{G_n}(G_{n+1})=\frac{3}{5}$ et $P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})=\frac{1}{5}$.
3. (G_n,G_{n+1}) forme un système complet d'évènement, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(G_{n+1})&=P_{G_n}(G_{n+1})P(G_n)+P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})P(\overline{G_n})\\&=\frac{3}{5}P(G_n)+\frac{1}{5}P(\overline{G_n})\\&=\frac{3}{5}P(G_n)+\frac{1}{5}(1-P(G_n))\\&=\frac{3}{5}P(G_n)+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}P(G_n)\\&=\frac{2}{5}P(G_n)+\frac{1}{5}\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$p_{n+1}=\frac{2}{5}p_n+\frac{1}{5}$$

4. Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=p_{n+1}-\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{5}p_n+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{5}\left(v_n+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{5}v_n+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}-\frac{5}{15}\\&=\frac{2}{5}v_n\end{aligned}$$

Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{2}{5}$. Son premier terme est :

$$v_1=p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

5. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme 0 donc d'après le cours, pour tout entier n,
$$v_n = 0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$
Comme $p_n = v_n + \dfrac{1}{3}$, on a pour tout entier n,
$$p_n = \frac{1}{3}$$

Exercice 11 – Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n > 0$ ».
Initialisation $(n = 0)$:
$u_0 = 2$ et $2 > 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 0$. Dès lors,
$$u_{n+1} = 5u_n + 4 > 5 \times 0 + 4 = 4 > 0$$
donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 0\,.$$

Exercice 12 – Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ».
Initialisation $(n = 0)$:
$u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Donc,
$$1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 2$$
Donc,
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1+u_n}{2} \leqslant 1$$
Donc, par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$,
$$0 \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leqslant \sqrt{1} = 1$$
C'est-à-dire :
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1\,.$$

Exercice 13 –

1. D'après la formule des probabilités composées,
$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1\cap B_2}(B_3) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{42}$$

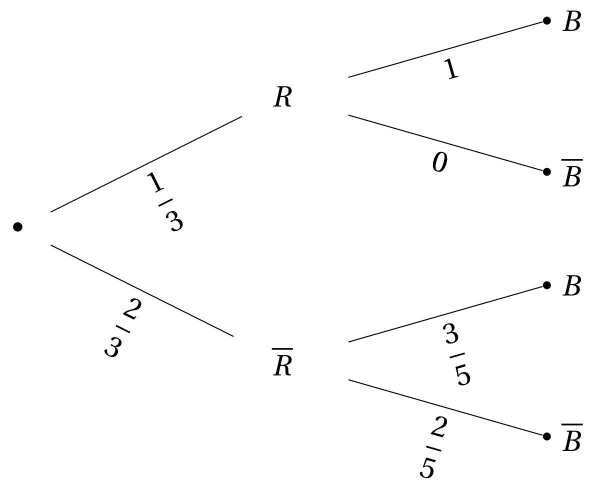
2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(N_3) &= P(B_1\cap B_2\cap N_3)+P(B_1\cap N_2\cap N_3)+P(N_1\cap B_2\cap N_3)+P(N_1\cap N_2\cap N_3)\\
&= \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\\
&= \frac{10}{63}+\frac{10}{63}+\frac{5}{42}+\frac{1}{21}\\
&= \frac{30+30+10+6}{126}\\
&= \frac{76}{126}=\frac{38}{63}
\end{aligned}$$

3. La probabilité qu'au moins une des boules soit noire vaut

$$1-P(B_1\cap B_2\cap B_3)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$$

Exercice 14 – La situation peut être illustrée à l'aide de l'arbre de probabilités suivant (**à faire au brouillon**) :



1. Les évènements R et $\overline{R}$ forment un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B)=P(R)P_R(B)+P(\overline{R})P_{\overline{R}}(B)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$$

2. Il s'agit de calculer la probabilité $P_B(\overline{R})$. D'après la formule de Bayes :

$$P_B(\overline{R})=\frac{P(\overline{R}\cap B}{P(B)}=\frac{P(\overline{R})P_{\overline{R}}(B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{11}{15}}=\frac{6}{11}$$