DEVOIR MAISON N° 1

Bon courage !

Exercice 1 *Extrait de ECRICOME 2008*

A/ Puissance n-ième d'une matrice

On considère les matrices M et P définies par :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2.
2. Vérifier que la matrice $D = PMP$ est une matrice diagonale.
3. Justifier que $M = PDP$ et établir par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.
4. En déduire que l'expression matricielle de M^n est donnée, pour tout entier naturel n, par :

$$M^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$$

B/ Étude du mouvement aléatoire d'une puce

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce, qui se déplace sur les sommets d'un triangle ABC. À l'instant $t = 0$, la puce se trouve sur le sommet A et se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si à l'instant n, la puce est au sommet A du triangle, elle est à l'instant $n + 1$ au sommet B avec la probabilité $\frac{1}{3}$, au sommet C avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- Si à l'instant n, la puce est au sommet B du triangle, elle est à l'instant $n + 1$ soit au sommet C, soit au sommet A de façon équiprobable ;
- Si à l'instant n, la puce est au sommet C alors elle y reste.

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'évènement « la puce est au sommet A à l'instant n » et par a_n sa probabilité ;
- B_n l'évènement « la puce est au sommet B à l'instant n » et par b_n sa probabilité ;
- C_n l'évènement « la puce est au sommet C à l'instant n » et par c_n sa probabilité.

1. Donner les valeurs de a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1.
2. Exprimer à l'aide de la formule des probabilités totales, les probabilités a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.
3. En déduire une matrice A telle que l'on ait pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^2 = M$.

4. Établir que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \\ c_{2n+1} \end{pmatrix} = AM^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Déterminer les expressions de a_{2n}, b_{2n}, c_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1} et c_{2n+1} en fonction de n.
7. Montrer que les suites (a_{2n}), (b_{2n}), (c_{2n}), (a_{2n+1}), (b_{2n+1}) et (c_{2n+1}) sont convergentes.
8. Les valeurs de b_{2n} et a_{2n+1} étaient-elles prévisibles ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4e^x}{1+e^x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-x}}$, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
3. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.
4. On appelle (T) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de (T).
5. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - (x+2)$.
   (a) Vérifier que $d'(x) = \dfrac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de d.
   (b) Calculer $d(0)$ puis étudier le signe de $d(x)$.
   (c) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (T).
6. Tracer les asymptotes trouvées à la question 2, la tangente en 0, et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédents conduisent à penser que :

— s'il a arrêté le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le $n+1$-ième est $0,8$;
— s'il a laissé passer le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est $0,6$;
— la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est $0,7$.

On note A_n l'évènement « le gardien arrête le n-ième tir ». On a donc $\mathbb{P}(A_1) = 0,7$.

1. (a) Donner, pour $n \geq 1$, les valeurs de $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = 0,2\mathbb{P}(A_n) + 0,6$$

2. On pose à présent, pour $n \geq 1$, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $u_n = p_n - 0,75$.

(a) Démontrer que u_n est une suite géométrique de raison $0,2$.

(b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

(c) Montrer que (p_n) admet une limite que l'on calculera.