DEVOIR MAISON N° 1

Ce sujet est composé de 5 exercices totalement indépendants. Les deux premiers sont extraits de sujets de concours ECRICOME et ESC, sur le thème des deux premiers chapitres vues en classe. Les autres doivent être vues comme une révision des notions abordées en première année.
Vous devrez faire (au moins) 3 de ces 5 exercices, dont (au moins) un des deux premiers exercices.
Bon courage !

Exercice 1 *Extrait de ESC*
On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ et QP.
2. Vérifier que $QAP = L$. En déduire que $A = PLQ$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PL^nQ$.
   (b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3.
   (c) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :
   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$
   (d) En déduire, pour $n \geq 2$, les neufs coefficients de L^n.
   (e) Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \geq 2$, on a :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
4. On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_{n+1} = u_n\,; \qquad v_{n+1} = v_n + 2w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = 2u_n + w_n$$
   (a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Donner u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
   (d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n$$

Exercice 2 *Extrait de ESC*

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée. On lance le dé et on observe son résultat :

- Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois ;
- Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILES apparus au cours de cette expérience.

1. (a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera en détail.
   (b) Donner l'expérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}([Y=2]\cap[X=6]) = \frac{1}{24}$.
3. (a) Montrer que pour $k \in \{1;2;3;4;5\}$, $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=0) = \frac{1}{2}$.
   (b) Que vaut $\mathbb{P}_{[X=6]}(Y=0)$? En déduire en utilisant la formule des probabilités totales que $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{11}{24}$.
   (c) Donner finalement la loi de la variable Y et calculer son espérance.
4. (a) Recopier et compléter les cases du tableau suivant afin qu'il fournisse la loi du couple (X,Y) (aucune justification supplémentaire n'est demandée).

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=0$						
$Y=1$						
$Y=2$						

   (b) Calculer alors la covariance de X et Y.

Exercice 3 *Extrait de ECRICOME*

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x)$$

1. Étudier le sens de variation de g et vérifier que g admet un minimum sur $]0;+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$. (*Indication numérique :* $\ln(2) \simeq 0,7$.)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe réprésentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

3. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que la droite (D) déquation $y = \dfrac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
6. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de (D). On montrera en particulier que (D) coupe $\mathcal{C}$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variations de f.

8. (a) Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$$

   (b) Étudier la convexité de f.
   La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle des points d'inflexion ?

9. On donner :

$$\frac{1}{e} \simeq 0,4 \qquad \sqrt{e} \simeq 1,6 \qquad f(\sqrt{e}) \simeq 1,3 \qquad f'(\sqrt{e}) \simeq 0,1$$

   Représenter la courbe $\mathcal{C}$ et la droite (D) dans un même repère orthonormé.