CORRIGÉ DEVOIR MAISON N° 1

Exercice 1

1. On a :

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$QP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2. On a :

$$\begin{aligned} QAP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \end{aligned}$$

On a $QAP = L$. Donc, $PLQ = PQAPQ = I_3AI_3 = A$. Ainsi, on a bien $A = PLQ$.

3. (a) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = PL^nQ$ » .

Initialisation $(n = 0)$:

$$A^0 = I \qquad \text{et} \qquad PL^0Q = PIQ = PQ = I$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PL^nQ \times PLQ \\ &= PL^nILQ \\ &= PL^{n+1}Q \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$A^n = PL^nQ$$

(b) On a :

$$J = L - I = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$J^2 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$J^3 = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = O_3$$

(c) Pour tout $n \geq 3$, on a $J^n = J^3 \times J^{n-3} = O_3$. Par ailleurs, les matrices I et J commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}L^n &= (J+I)^n\\&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k I^{n-k}\\&= \binom{n}{0}J^0 I^n + \binom{n}{1}J^1 I^{n-1} + \binom{n}{2}J^2 I^{n-2}\\&= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2\end{aligned}$$

(d) On a :

$$\begin{aligned}L^n &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2n & 0\\0 & 0 & 2n\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 2n(n-1)\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}1 & 2n & 2n(n-1)\\0 & 1 & 2n\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(e) Dès lors :

$$\begin{aligned}A^n &= PL^nQ\\&= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2n & 2n(n-1)\\0 & 1 & 2n\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 2n & 2n(n-1)\\0 & 1 & 2n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2n(n-1) & 1 & 2n\\2n & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = 1$$

5. On a :
$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1} \end{aligned}$$

6. Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $X_n = A^n X_0$ » .
Initialisation $(n = 0)$:
$$A^0 X_0 = IX_0 = X_0$$
donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :
$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= A \times A^n X_0 \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$
donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :
$$X_n = A^n X_0$$

7. On a :
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= X_n = A^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) + 4n \\ 2n + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n+1) \\ 2(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) Le dé étant équilibré, tous les tirages sont équiprobables. Ainsi, X suit une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$.

   (b) On a $\mathbb{E}(X)=\dfrac{6+1}{2}=\dfrac{7}{2}$ et $\mathbb{V}(X)=\dfrac{6^2-1}{12}=\dfrac{35}{12}$.

2. Pour obtenir 2 PILES, il faut lancer la pièce deux fois et donc avoir obtenur un 6 avec le dé. On a donc bien $\mathbb{P}(Y=2)=\mathbb{P}([Y=2]\cap[X=6])$. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}([Y=2]\cap[X=6])=\mathbb{P}(X=6)\times\mathbb{P}_{[X=6]}(Y=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

3. (a) Si l'on a obtenu $1,2,3,4$ ou 5 avec le dé, alors on ne lance la pièce qu'une seule fois et donc on a une chance sur deux d'obtenir un PILE et une chance sur deux de n'en obtenir aucun. Ainsi,

$$\forall k\in\{1;2;3;4;5\}\ ,\qquad \mathbb{P}_{[X=k]}(Y=0)=\frac{1}{2}$$

   (b) Si on a obtenu un 6 avec le dé, alors on lance la pièce deux fois. Ainsi, on obtient 0 PILE si, et seulement si, on obtient 2 FACES. On a donc :

$$\mathbb{P}_{[X=6]}(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

   D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0)&=\mathbb{P}_{[X=1]}(Y=0)\times\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}_{[X=2]}(Y=0)\times\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}_{[X=3]}(Y=0)\times\mathbb{P}(X=3)\\&\quad+\mathbb{P}_{[X=4]}(Y=0)\times\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}_{[X=5]}(Y=0)\times\mathbb{P}(X=5)+\mathbb{P}_{[X=6]}(Y=0)\times\mathbb{P}(X=6)\\&=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{11}{24}\end{aligned}$$

   (c) On a déjà vu que $\mathbb{P}(Y=2)=\dfrac{1}{24}$ et que $\mathbb{P}(Y=0)=\dfrac{11}{24}$ et donc

$$\mathbb{P}(Y=1)=1-\mathbb{P}(Y=0)-\mathbb{P}(Y=2)=1-\frac{1}{24}-\frac{11}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

   Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{11}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{1}{24}$

   Et on a donc :

$$\mathbb{E}(Y)=0\times\frac{11}{24}+1\times\frac{12}{24}+2\times\frac{1}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

4. (a) On a :

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
$Y=1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$Y=2$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$

(b) Commençons par calculer $\mathbb{E}(XY)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= 0\times 1\times\frac{1}{12}+0\times 2\times\frac{1}{12}+\cdots+2\times 6\times\frac{1}{24}\\ &= \frac{1+2+3+4+5+6+6}{12}\\ &= \frac{27}{12}\end{aligned}$$

On en déduit, d'après la formule de Huygens,

$$Cov(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\frac{27}{12}-\frac{7}{2}\times\frac{7}{12}=\frac{54}{24}-\frac{49}{24}=\frac{5}{24}$$

Exercice 3

1. Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a :

$$g'(x)=2x-\frac{4}{x}=\frac{2x^2-4}{x}$$

Or, pour $x>0$, on a $2x^2-4\geq 0 \iff 2x^2\geq 4 \iff x^2\geq 2 \iff x\geq\sqrt{2}$. On en déduit le tableau de signe de $g'(x)$, ainsi que le tableau de variations de g :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$2x^2-4$		$-$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	$2(1-\ln(2))$	$\nearrow$	

En effet,

$$g(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-4\ln(\sqrt{2})=2-2\ln(2)=2(1-\ln(2))$$

D'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction g admet bien un minimum en $\sqrt{2}$ égal à $2(1-\ln(2))$.

2. On a $2(1-\ln(2))\simeq 2\times(1-0,7)=2\times 0,3=0,6>0$. Le minimum de g est donc strictement positif donc pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g(x)>0$.

3. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln(x) &=& -\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x &=& 0\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par quotient}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+\ln(x)}{x}=-\infty\end{array}\\ \hfill\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{4}=0\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{4}+\dfrac{1+\ln(x)}{x}=-\infty\end{array}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote verticale en 0.

4. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\ln(x) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\ln(x)}{x} = 0^+\end{array} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4} + \dfrac{1+\ln(x)}{x} = +\infty\end{array}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

5. On a :

$$f(x) - y = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{x}{4} = \frac{1+\ln(x)}{x}$$

Et on a vu à la question précédente que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$ et la droite (D) d'équation $y = \dfrac{x}{4}$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

6. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et (D), il nous faut étudier le signe de $f(x) - y$. On a vu à la question précédente que :

$$f(x) - y = \frac{1+\ln(x)}{x}$$

On a :

$$1+\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$1+\ln(x)$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)-y$		$-$	0	$+$	

Ainsi,
- sur $]0; \frac{1}{e}]$, $\mathcal{C}$ est en dessous de (D)
- sur $[\frac{1}{e}; +\infty[$, $\mathcal{C}$ est en dessous de (D).

En particulier, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite (D) se coupent en un point A donc l'abscisse est $\dfrac{1}{e}$ et l'ordonnée est $\dfrac{\frac{1}{e}}{4} = \dfrac{1}{4e}$.

7. Posons $u(x) = 1 + \ln(x)$ et $v(x) = x$. On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + \ln(x)) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1 - 1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4\ln(x)}{4x^2} \\ &= \frac{g(x)}{4x^2} \end{aligned}$$

Or, on a déjà étudié le signe de g à la question **2**. On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ ainsi que le tableau de variations de f :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

8. (a) Posons $u(x) = x^2 - 4\ln(x)$ et $v(x) = 4x^2$. On a $u'(x) = 2x - \dfrac{4}{x}$ et $v'(x) = 8x$. On en déduit :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{\left(2x - \frac{4}{x}\right) \times 4x^2 - \left(x^2 - 4\ln(x)\right) \times 8x}{(4x^2)^2} \\ &= \frac{8x^3 - 16x - 8x^3 + 32x\ln(x)}{16x^4} \\ &= \frac{32x\ln(x) - 16x}{16x^4} \\ &= \frac{16x(2\ln(x) - 1)}{16x^4} \\ &= \frac{2\ln(x) - 1}{x^3} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$2\ln(x) - 1 \geq 0 \iff 2\ln(x) \geq 1 \iff \ln(x) \geq \frac{1}{2} \iff x \geq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
x^3		$+$		$+$	
$2\ln(x) - 1$		$-$	0	$+$	
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi,

- f est concave sur $]0; \sqrt{e}]$
- f est convexe sur $[\sqrt{e}; +\infty[$

La courbe $\mathcal{C}$ possède donc un point d'inflexion dont l'abscisse est $\sqrt{e}$ et l'ordonnée $f(\sqrt{e})$.

9. On obtient l'allure de courbe suivante :