# CORRIGÉ - DEVOIR MAISON 4

**Exercice 1 –**

1. $$\begin{aligned}\int_0^1 (x^4-3x^2+4x-2)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^5}{5}-x^3+2x^2-2x\right]_0^1\\ &= \frac{1}{5}-1+2-2\\ &= \frac{1}{5}-\frac{5}{5}\\ &= -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

2. Commençons par trouver une primitive de $f(t)=\dfrac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$. $f$ semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(t)=t^2+t+1$. On a $u'(t)=2t+1$. Dès lors,
$$\frac{u'(t)}{u(t)^2}=\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}=f(t)$$
Donc, une primitive de $f$ est donnée par :
$$F(t)=\frac{-1}{u(t)}=\frac{-1}{t^2+t+1}$$
Et donc,
$$\begin{aligned}&\int_0^2 \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{-1}{t^2+t+1}\right]_0^2\\ &= \frac{-1}{7}-\frac{-1}{1}\\ &= \frac{6}{7}\end{aligned}$$

3. Commençons par trouver une primitive de $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+16}}$. $f$ semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t)=t^2+16$. On a $u'(t)=2t$. Dès lors,
$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}=\frac{2t}{\sqrt{t^2+16}}=2f(t)$$
Donc, une primitive de $f$ est donnée par :
$$F(t)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{u(t)}=\sqrt{t^2+16}$$
Et donc,
$$\begin{aligned}&\int_0^3 \frac{2t}{\sqrt{t^2+16}}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\sqrt{t^2+16}\right]_0^3\\ &= \sqrt{25}-\sqrt{16}\\ &= 5-4=1\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(3x^2-2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x &= \left[x^3-x^2+2\sqrt{x}\right]_1^2\\ &= 8-4+2\sqrt{2}-(1-1+2)\\ &= 2+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

5. Commençons par trouver une primitive de $f(x)=(2x+1)^3$. $f$ semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x)=2x+1$. On a $u'(x)=2$. Dès lors,
$$u'(x)u(x)^3 = 2(2x+1)^3 = 2f(x)$$
Donc, une primitive de $f$ est donnée par :
$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u(x)^4}{4}=\frac{(2x+1)^4}{8}$$
Et donc,
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1}(2x+1)^3\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(2x+1)^4}{8}\right]_{-2}^{-1}\\ &= \frac{1}{8}-\frac{27}{8}\\ &= \frac{-26}{8}=\frac{-13}{4}\end{aligned}$$

**Exercice 2 –**

1. Tout d'abord, pour tout $x\neq -1$,
$$f(x)=\frac{x^2(3x+5)}{(x+1)^2}=\frac{3x^3+5x^2}{x^2+2x+1}$$
Dès lors,
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}3x=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}3x=+\infty$$
Ensuite, pour calculer les limites en $(-1)^-$ et $(-1)^+$, on décompose :
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to(-1)^-} x^2(3x+5)=2\\ \lim_{x\to(-1)^-}(x+1)^2=0^+\end{aligned}\right\}\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=+\infty$$
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to(-1)^+} x^2(3x+5)=2\\ \lim_{x\to(-1)^+}(x+1)^2=0^+\end{aligned}\right\}\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$$

2. (a) Soit $x\neq-1$. On a :
$$\begin{aligned}3x-1-\frac{x-1}{(x+1)^2} &= \frac{(3x-1)(x+1)^2}{(x+1)^2}-\frac{x-1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{(3x-1)(x^2+2x+1)-x+1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{3x^3+6x^2+3x-x^2-2x-1-x+1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{3x^3+5x^2}{(x+1)^2}\\ &= f(x)\end{aligned}$$

(b) Calculons tout d'abord $f(x) - y$ :

$$f(x) - y = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} - (3x-1) = -\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x+1}{x^2+2x+1}$$

Puis,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0^+$$

De même,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0^-$$

Donc, la droite $(\Delta)$ d'équation $y = 3x - 1$ est bien asymptote oblique à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

(c) Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\Delta$, il faut étudier le signe de $f(x) - y$. On vient de voir que

$$f(x) - y = \frac{-x+1}{(x+1)^2}$$

Dès lors,

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x+1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(x+1)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)-y$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Ainsi,

- Sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1]$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\Delta$ ;
- Sur $[1;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\Delta$.

3. (a) $f$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2(3x+5)$ et $v(x) = (x+1)^2$. On a

$$u'(x) = 2x(3x+5) + x^2 \times 3 = x(2(3x+5) + 3x) = x(6x+10+3x) = x(9x+10)$$

Et,

$$v'(x) = 2(x+1)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{x(9x+10)(x+1)^2 - x^2(3x+5) \times 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{x(x+1)\left((9x+10)(x+1) - 2x(3x+5)\right)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{x(9x^2+9x+10x+10-6x^2-10x)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x(3x^2+9x+10)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

(b) On établit ensuite le tableau de signes de $f'(x)$.
Calculons le discriminant de $3x^2+9x+10$ : $\Delta = 81-120 = -41 < 0$. Donc, $3x^2+9x+10$ est toujours du signe de $a$, c'est-à-dire positif.
On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x^2+9x+10$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(x+1)^3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

4. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est donnée par :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

Or,

$$f(0) = \frac{0^2 \times (3\times 0+5)}{(0+1)^2} = 0$$

$$f'(0) = \frac{0\times(3\times 0^2+9\times 0+10)}{(0+1)^3} = 0$$

Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est donnée par : $y = 0$.

5. On obtient le graphique suivant :