

CORRIGÉ - DEVOIR MAISON 3

Exercice 1 – 1. La fonction f est une fraction rationnelle donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{V.I.\}$. L'unique valeur interdite est la solution de l'équation $x + 1 = 0$. On a $x + 1 = 0 \iff x = -1$ donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} x^2 + 2x - 3 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} x + 1 = 0^- \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 + 2x - 3 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x + 1 = 0^+ \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

3. Posons $u(x) = x^2 + 2x - 3$ et $v(x) = x + 1$. On a $u'(x) = 2x + 2$ et $v'(x) = 1$. Donc,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x-3) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 5}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $f'(x)$. Tout d'abord un carré est toujours positif donc $(x+1)^2 \geq 0$. Ensuite, pour le signe de $x^2 + 2x + 5$, on calcule le discriminant : $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. Ainsi, $x^2 + 2x + 5$ est toujours du signe de a , c'est-à-dire positif. On obtient ainsi le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^2 + 2x + 5$	+	+	+
$(x+1)^2$	+	0	+
$f'(x)$	+	+	+
Variations de f	$-\infty$ 	$+\infty$	$+\infty$ 

4. L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

On a :

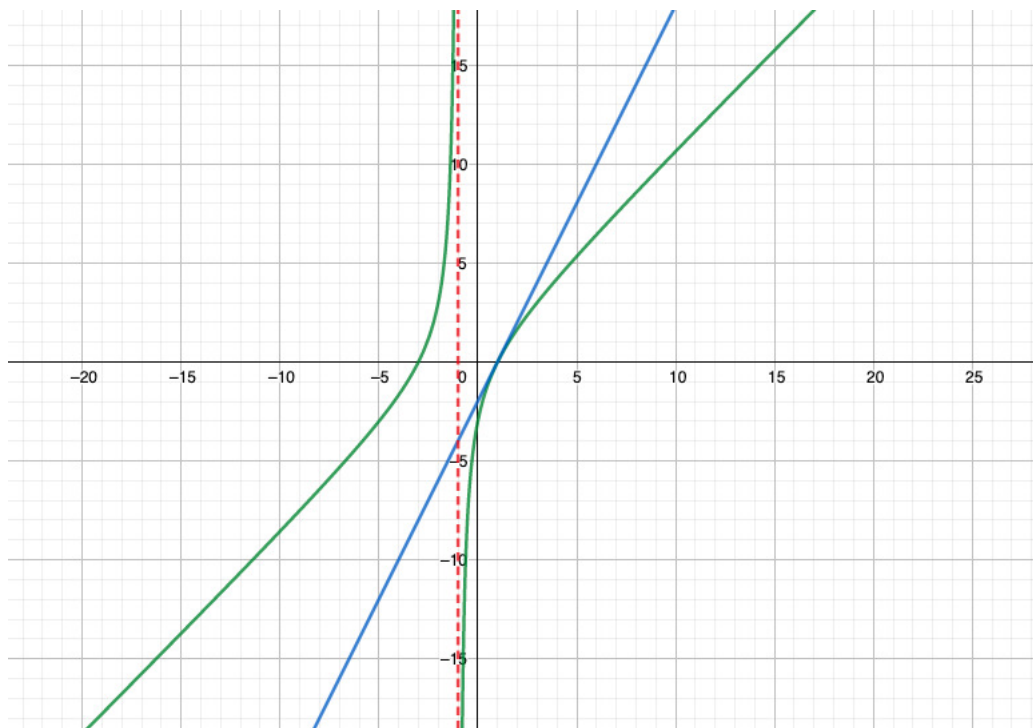
$$f(1) = \frac{1^2 + 2 \times 1 - 3}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f'(1) = \frac{1^2 + 2 \times 1 + 5}{(1 + 1)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Ainsi, l'équation de la tangente est :

$$y = 0 + 2(x - 1) = 2x - 2$$

5. On obtient la courbe et la tangente suivante :



Exercice 2 – 1. La fonction f est une fraction rationnelle donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{V.I\}$. Pour trouver les valeurs interdites calculons le discriminant de $2x^2 + 2x + 5$: $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$. Il n'y a donc pas de valeur interdite et donc

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

2. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0^+$$

3. Posons $u(x) = 4x + 2$ et $v(x) = 2x^2 + 2x + 5$. On a $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 4x + 2$. Donc,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{4(2x^2 + 2x + 5) - (4x + 2)(4x + 2)}{(2x^2 + 2x + 5)^2} \\ &= \frac{8x^2 + 8x + 20 - 16x^2 - 16x - 4}{(2x^2 + 2x + 5)^2} \\ &= \frac{-8x^2 - 8x + 16}{(2x^2 + 2x + 5)^2} \\ &= \frac{-8(x^2 + x - 2)}{(2x^2 + 2x + 5)^2} \end{aligned}$$

4. Calculons le discriminant de $x^2 + x - 2$. On a : $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

Par ailleurs, un carré étant toujours positif, on sait que $(2x^2 + 2x + 5)^2 > 0$.
On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
-8	$-$	$-$	$-$				
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$(2x^2 + 2x + 5)^2$	$+$		$+$		$+$		
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
Variations de f	0^-	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0^+

En effet,

$$f(-2) = \frac{4 \times (-2) + 2}{2 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) + 5} = \frac{-8 + 2}{8 - 4 + 5} = \frac{-6}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$f(1) = \frac{4 \times 1 + 2}{2 \times 1^2 + 2 \times 1 + 5} = \frac{4 + 2}{2 + 2 + 5} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

5. L'équation de la tangente au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ est donnée par :

$$y = f\left(-\frac{1}{2}\right) + f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

Or,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 5} = \frac{0}{\frac{9}{2}} = 0$$

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-8\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2\right)}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{-8 \times \left(\frac{-9}{4}\right)}{\frac{81}{4}} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$$

Donc, l'équation de la tangente au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ est donnée par :

$$y = 0 + \frac{8}{9}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

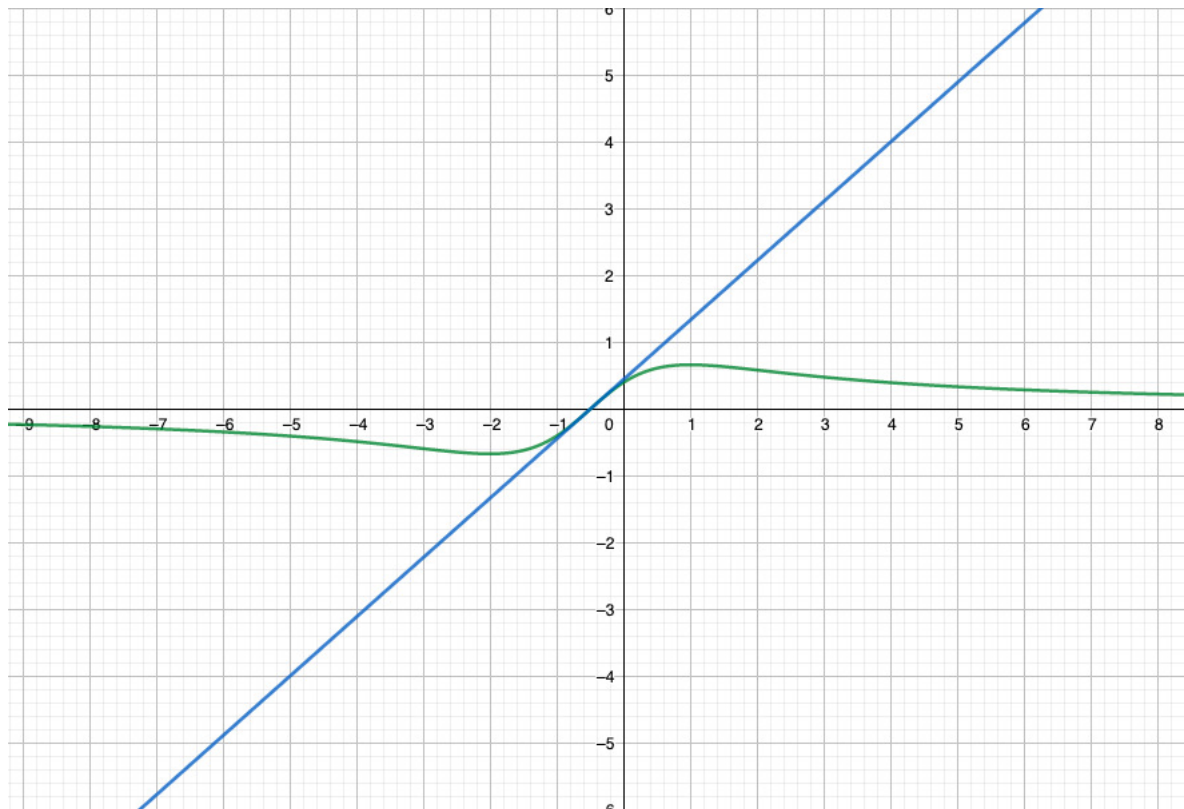
6. Étudions le signe de $f(x) - y$. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{4x+2}{2x^2+2x+5} - \frac{8}{9}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2(2x+1) - \frac{4}{9}(2x+1)(2x^2+2x+5)}{2x^2+2x+5} = \frac{2(2x+1)(9 - 2(2x^2+2x+5))}{9(2x^2+2x+5)} \\ &= \frac{2(2x+1)(9 - 4x^2 - 4x - 10)}{9(2x^2+2x+5)} \\ &= \frac{2(2x+1)(-4x^2 - 4x - 1)}{9(2x^2+2x+5)} \\ &= \frac{-2(2x+1)(2x+1)^2}{9(2x^2+2x+5)} \\ &= \frac{-2(2x+1)^3}{9(2x^2+2x+5)} \end{aligned}$$

Dès lors, le signe de $f(x) - y$ ne dépend que du signe de $2x+1$. On en déduit que :

- sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, $f(x) - y > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (T)
- sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, $f(x) - y < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (T)

7. On a l'allure suivante :



Exercice 3 – 1. On a :

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

Par ailleurs, si le client a choisi la boîte A alors il a 2 chances sur 20 de tomber sur le sachet gagnant. Ainsi,

$$P_A(G) = \frac{2}{20}$$

De même,

$$P_B(G) = \frac{3}{20}$$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(A \cap G) = P(A) \times P_A(G) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{20} = \frac{1}{20}$$

3. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{20} = \frac{3}{40}$$

4. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) = \frac{2}{40} + \frac{3}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

5. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_G(A) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{20} \times \frac{8}{1} = \frac{2}{5}$$

6. Puisqu'il y a deux bonbons par sachet et qu'un seul est gagnant, on a :

$$P_G(G_1) = P_G(G_2) = \frac{1}{2}$$

7. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(G_1) = P(G \cap G_1) = P(G) \times P_G(G_1) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

8. D'après la formule des probabilités composées,

$$P_{\overline{G_1}}(G_2) = \frac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(\overline{G_1})} = \frac{P(G_2)}{P(\overline{G_1})} = \frac{P(G) \times P_G(G_2)}{P(\overline{G_1})} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{1}{15}$$

9. On a $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ donc $P(G_1 \cap G_2) = 0$ mais $P(G_1) \times P(G_2) \neq 0$ donc G_1 et G_2 ne sont pas indépendants.