Exercice 1

1. Les valeurs interdites sont les solutions de $x-2=0$, *i.e* $x=2$. Donc, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
2. Étudions le signe de $2x^2-x-3$. On a $\Delta = (-1)^2 - 4\times 2\times(-3) = 1+24 = 25$. Il y a donc deux racines qui sont :
$$x_1 = \frac{1-5}{4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

3. On a :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$
Par ailleurs,
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to2^-} 2x^2-x-3 = 3\\ \displaystyle\lim_{x\to2^-} x-2 = 0^-\end{array}\right\} \underset{\text{par quotient}}{\displaystyle\lim_{x\to2^-}} \frac{2x^2-x-3}{x-2} = -\infty$$
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to2^+} 2x^2-x-3 = 3\\ \displaystyle\lim_{x\to2^+} x-2 = 0^+\end{array}\right\} \underset{\text{par quotient}}{\displaystyle\lim_{x\to2^+}} \frac{2x^2-x-3}{x-2} = +\infty$$
4. Posons $u(x) = 2x^2-x-3$ et $v(x) = x-2$. Alors, $u'(x) = 4x-1$ et $v'(x) = 1$. Donc,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(4x-1)(x-2)-(2x^2-x-3)\times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{4x^2-8x-x+2-2x^2+x+3}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-8x+5}{(x-2)^2} \end{aligned}$$
Étudions le signe de $2x^2-8x+5$. Le discriminant vaut $\Delta = (-8)^2 - 4\times 2\times 5 = 64-40 = 24$. Il y a donc deux racines qui sont :
$$x_1 = \frac{8-\sqrt{24}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+\sqrt{24}}{4}$$

Or, $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. Donc,

$$x_1 = \frac{8 - 2\sqrt{6}}{4} = \frac{4 - \sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + 2\sqrt{6}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{2}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{6}}{2}$		2		$\frac{4+\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 8x + 5$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{6}+7$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{6}+7$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe admet un maximum local en $\frac{4-\sqrt{6}}{2}$ et ce maximum vaut $-2\sqrt{6}+7$. La courbe admet un minimum local en $\frac{4+\sqrt{6}}{2}$ et ce minimum vaut $2\sqrt{6}+7$.

5. Posons $u(x) = 2x^2 - 8x + 5$ et $v(x) = (x-2)^2$. Alors, $u'(x) = 4x - 8$ et $v'(x) = 2(x-2)$. Dès lors,

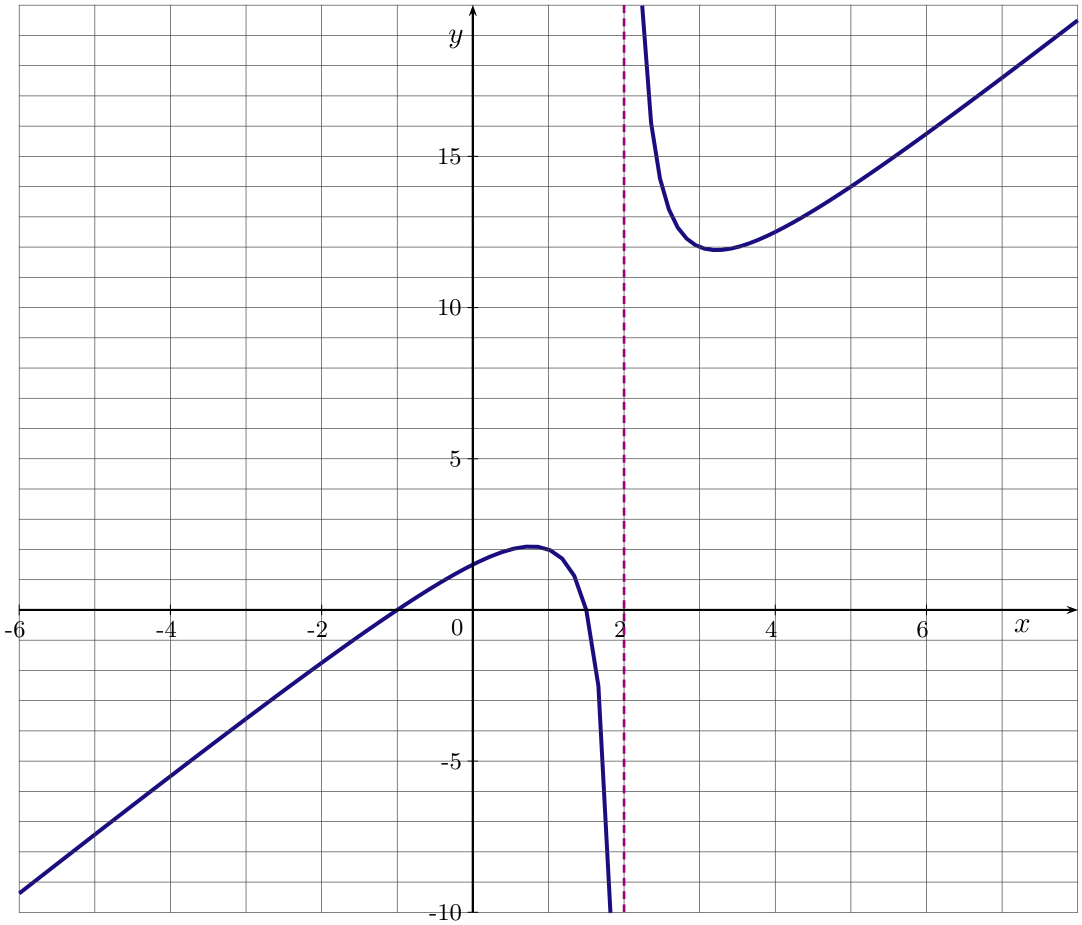
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(4x-8)(x-2)^2 - (2x^2 - 8x + 5) \times 2(x-2)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{(x-2)\big((4x-8)(x-2) - 2(2x^2 - 8x + 5)\big)}{(x-2)^4} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 8x + 16 - 4x^2 + 16x - 10}{(x-2)^3} \\ &= \frac{6}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
6		$+$		$+$	
$(x-2)^3$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	

Donc, f est concave sur $]-\infty;2[$ et convexe sur $]2;+\infty[$.

6. L'allure de la courbe est la suivante :



Exercice 2

1. f est une fraction rationnelle donc son ensemble de définition est donné par $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{V.I\}$. Déterminons donc les valeurs interdites de f. On calcule donc le discriminant de x^2-x+1 : $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times 1 = -3$. Le discriminant étant négatif, il n'y a pas de racine. Ainsi,

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

2. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

3. Posons $u(x) = x^2 - x - 2$ et $v(x) = x^2 - x + 1$. On a $u'(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = 2x - 1$. Ainsi,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(2x-1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2-x-2)}{(x^2-x+1)^2} \\
&= \frac{2x^3-2x^2+2x-x^2+x-1-2x^3+2x^2+4x+x^2-x-2}{(x^2-x+1)^2} \\
&= \frac{6x-3}{(x^2-x+1)^2}
\end{aligned}
$$

4. On a $6x-3=0 \iff x=\frac{1}{2}$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x-3$		$-$	0	$+$	
$(x^2-x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Enfin,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1} = \frac{-\frac{9}{4}}{\frac{3}{4}} = -3$$

5. L'équation de la tangente à la courbe en $x_0=2$ est donnée par :

$$y = f(2)+f'(2)(x-2)$$

On a :

$$
\begin{aligned}
f(2) &= \frac{2^2-2-2}{2^2-2+1} = \frac{0}{3} = 0 \\
f'(2) &= \frac{6\times 2-3}{(2^2-2+1)^2} = \frac{9}{9} = 1
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'équation de la tangente est donnée par :

$$y = 0+1(x-2) = x-2$$

6. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (T), on étudie le signe de $f(x)-y$. On a :

$$
\begin{aligned}
f(x)-y &= \frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}-(x-2) \\
&= \frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}-\frac{(x-2)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} \\
&= \frac{x^2-x-2-(x^3-x^2+x-2x^2+2x-2)}{x^2-x+1}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x^2 - x - 2 - x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}$$
$$= \frac{-x^3 + 4x^2 - 4x}{x^2 - x + 1}$$
$$= \frac{x(-x^2 + 4x - 4)}{x^2 - x + 1}$$

Calculons le discriminant de $-x^2+4x-4$: $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 0$. Il y a donc une seule racine :

$$x_0 = \frac{-4}{2 \times (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Par ailleurs, d'après les calculs effectués à la question 1, on sait que $x^2 - x + 1 > 0$ pour tout x.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2+4x-4$		$-$		$-$	0	$-$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Ainsi,
- sur $]-\infty;0]$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (T)
- sur $[0;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (T)

7. Allure de $\mathcal{C}_f$ et de la tangente (T) :