DEVOIR MAISON N° 2

Exercice 1

Un particulier s'adresse à une société de crédit et emprunte 100 000 euros. Le taux mensuel de ce crédit est 1%. Il est prévu dans le contrat un remboursement fixe, mensuel, égal à 2000 euros, correspondant à une partie du remboursement du crédit et aux intérêts dus chaque mois.
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 100\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est la somme qu'il reste à rembourser à la fin du n-ième mois après l'emprunt.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout entier n,
$$u_{n+1} = 1,01u_n - 2000$$
3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$v_n = u_n - 200\,000$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
5. Calculer u_{69}.
6. En déduire le temps qu'il faudra à cette personne pour rembourser totalement son emprunt. Préciser la somme qu'il faudra verser lors du dernier remboursement.

Exercice 2

On considère le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$P(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$$

1. Calculer $P(1)$.
2. En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-1)Q(x)$ et le déterminer.
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.
4. En déduire le domaine de définition de la fonction f définie par
$$f(x) = \sqrt{x^3 - 11x^2 + 31x - 21}$$
5. Donner le domaine de définition de la fonction g définie par :
$$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x^3 - 11x^2 + 31x - 21}$$

Exercice 3

Une urne contient 4 boues blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne.

1. Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient noires.
2. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit noire.
3. On suppose que la deuxième boule tirée est noire. Calculer la probabilité que la première boule tirée soit également noire.

Exercice 4

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

— la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
— s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
— s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

— G_n l'évènement "le joueur gagne la n-ième partie" ;
— p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. On suppose (dans cette question uniquement), que le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $q_n = p_n - \frac{3}{4}$. Montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
5. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.