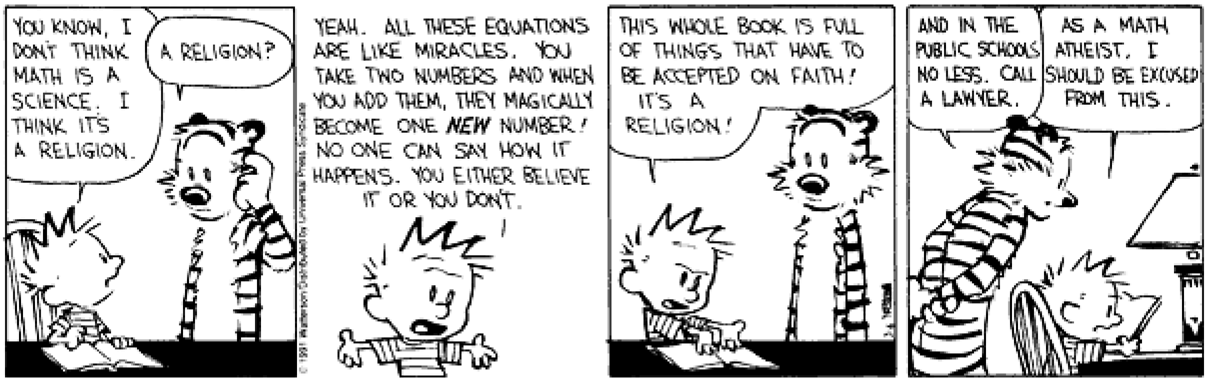
Cours de mathématiques
ECT 2ème année

Chapitre 9
Réduction des matrices carrées



Adrien Fontaine
Année scolaire 2018–2019

1. Matrice diagonalisable

1.1. Définition

Définition 1 :

Soit A une matrice. On dit que la matrice A est **diagonalisable** si et seulement si, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que

$$A = PDP^{-1}$$

Remarque :

- On a :
$$A = PDP^{-1} \iff P^{-1}AP = D$$
On suppose que $A = PDP^{-1}$. Alors, $P^{-1}AP = P^{-1}PDP^{-1}P = I_nDI_n = D$.
Réciproquement, si $D = P^{-1}AP$, alors $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_nAI_n = A$.
- « Diagonaliser une matrice » signifie trouver les matrices D diagonales et P inversibles, telle que $A = PDP^{-1}$.

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. En effet, considérons les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrons que P est inversible et calculons P^{-1}. On a : $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$ donc P est inversible et :

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} PDP^{-1} = P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Remarque : En pratique, il n'est pas nécéssaire de calculer P^{-1} pour montrer que A est diagonalisable, comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 1 :

Soit A une matrice, D une matrice diagonale et P une matrice inversible. Si $AP = PD$, alors la matrice A est diagonalisable.

Exemple : On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, la matrice P est inversible car $1 \times (-1) - 1 \times 3 = -4 \neq 0$. Par conséquent, d'après la proposition ci-dessus, la matrice D est diagonalisable.

1.2. Application au calcul de puissance

Proposition 2 :

Soit A une matrice. On suppose qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D telle que :

$$A = PDP^{-1}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Preuve. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Initialisation ($n = 0$) :
$A^0 = I_n$ et $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = PD^nP^{-1}$. Par ailleurs, on sait que $A = PDP^{-1}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

□

Remarque : Si le calcul de P^{-1} n'est pas nécéssaire pour montrer qu'une matrice A est diagonalisable, il est cependant indispensable pour obtenir une expression explicite des puissances de A, ce qui est souvent ce que l'on cherche à obtenir.

2. Valeurs propres et vecteurs propres

2.1. Définition

Définition 2 : Valeur propres et vecteurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et λ un réel.

- On dit que λ est une **valeurs propre de la matrice** A, si et seulement si,

$$\text{il existe } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ \underline{\text{non nul}} \text{ tel que } AX = \lambda X$$

- La matrice X est alors appelée **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.

Exemple : On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M, et préciser les valeurs propres assoicés.

La matrice colonne $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est non nulle et de plus :

$$MV_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1$$

ce qui prouve que V_1 est vecteur propre de M pour la valeur propre 1.

La matrice colonne $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nulle et de plus :

$$MV_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6V_2$$

ce qui prouve que V_2 est vecteur propre de M pour la valeur propre 6.

La matrice colonne $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est non nulle et de plus :

$$MV_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2V_3$$

ce qui prouve que V_3 est vecteur propre de M pour la valeur propre -2.

Proposition 3 :

Soit A une matrice et λ un réel. Il n'y a que deux possibilités pour l'ensemble des solutions de l'équation $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- ou bien cet ensemble contient uniquement la matrice-colonne nulle, auquel λ n'est pas valeur propre de A ;
- ou bien cet ensemble ne contient pas uniquement la matrice colonne non nulle, auquel cas λ est valeur de propre de A, et toute matrice **non nulle** de cet ensemble est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Le réel 3 est-il valeur propre de A ? Si oui, déterminer un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.

$$AX = 3X \iff \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -6y + 6z = 3x \\ -x - 5y + 6z = 3y \\ -x - 8y + 9z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6y + 6z = 3x \\ -x - 5y + 6z = 3y \\ -3y + 3z = -3y + 3z \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} -2y + 2z = x \\ -x - 5y + 6z = 3y \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y + 2z = 0 \\ -x - 8y + 6z = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi un système à un degré de liberté. On choisit alors $x = 1$ (par exemple). Le système devient :

$$\begin{cases} -1 - 2y + 2z = 0 \\ -1 - 8y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2y + 2z = 1 \\ -8y + 6z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2y + 2z = 1 \\ -2y = -2 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$$\iff \begin{cases} -2 + 2z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $x = 1$, $y = 1$ et $z = \frac{3}{2}$ sont une solution du système linéaire étudié. Cette solution est non nulle. Ainsi, $\lambda = 3$ est une valeur propre de A et un vecteur propre associé est le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

2. Le réel 2 est-il valeur propre de A . Si oui, déterminer un vecteur propre associé à cette valeur propre.

$$AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \\ -1 & -8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & - & 6y & + & 6z & = & 2x \\ -x & - & 5y & + & 6z & = & 2y \\ -x & - & 8y & + & 9z & = & 2z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 6y & + & 6z & = & 0 \\ -x & - & 7y & + & 6z & = & 0 \\ -x & - & 8y & + & 7z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & & & = & 0 \\ -x & - & 7y & + & 6z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & y & = & z & & \\ -x & - & 7y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff x = y = z = 0$$

Autrement dit, l'unique solution de l'équation $AX = 2X$ est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc, 2 n'est pas valeur propre de A.

2.2. Polynôme annulateur de A

Définition 3 : Polynôme matriciel et polynôme annulateur

Soit A une matrice carrée et $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_pX^p$ un polynôme. On définit le **polynôme matriciel** P(A) comme étant la matrice carrée :

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_pA^p$$

On dit que le polynôme P est **annulateur de la matrice** A lorsque $P(A) = O_n$.

Exemple : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- si $P(X) = X^2 + 2X$, alors $P(A) = A^2 + 2A$.
- si $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X + 1$, alors $P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A + I_3$
- si $P(x) = -3$, alors $P(A) = -3I_3$.

Exemple : On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors le polynôme $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de M.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Donc,

$$\begin{aligned} M^3 + M^2 + I_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de P.

Proposition 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice. Le polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de A.

Preuve. On a $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$. Donc,

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_3 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(a+d)a & -(a+d)b \\ -(a+d)c & -(a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - db \\ ca + dc - ac - dc & cb + d^2 - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \end{aligned}$$

Donc, le polynôme $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$ est bien un polynôme annulateur de A. □

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de A.
On applique la formule de la proposition ci-dessus. Le polynôme $X^2 - (1+4)X + (1 \times 4 - 2 \times 3) = X^2 - 5x - 2$ est annulateur de A.

Théorème 1 :

Soit A une matrice carrée et P un polynôme annulateur de A.
Toute valeur propre λ de A est racine du polynôme P.

⚠ATTENTION !⚠

Ce résultat nous indique seulement que les valeurs propres de A sont également des racines du polynôme P. Il peut donc y avoir des racines du polynôme P qui ne sont pas des valeurs propres de A.

Exemple : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P = X^3 - X$ est annulateur de A.
On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc,

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$$

Donc, P est bien annulateur de A.

2. En déduire les valeurs propres possibles de A.
Il nous faut trouver les racines de P. On a :

$$X^3 - X = X(X^2 - 1) = X(X-1)(X+1)$$

Donc, les racines de P sont 0, 1 et -1. Donc, les valeurs propres possibles de A sont 0, 1, -1.

3. Déterminer lesquelles sont bien des valeurs propres de A.
Cherchons à résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = -X$. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}
AX = 0 &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & z & = & x \\ x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ y & = & x \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = 0$, et cette matrice colonne est non nulle. Donc, 0 est bien valeur propre de A.
Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & & & + & 2z & = & x \\ x & + & y & - & 2z & = & y \\ -x & & & + & z & = & z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3x & + & 2z & = & 0 \\ x & - & 2z & = & 0 \\ -x & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = X$. De plus, cette matrice colonne est non nulle. Donc, 1 est bien valeur propre de A.
Enfin,

$$\begin{aligned}
AX = -X &\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & 2x & & & + & 2z & = & -x \\ & x & + & y & - & 2z & = & -y \\ - & x & & & + & z & = & -z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrrrrrr} - & x & & & + & 2z & = & 0 \\ & x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ - & x & & & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrcr} x & & = & 2z \\ & 2y & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = -X$. De plus, cette matrice colonne est non nulle. Donc, -1 est bien valeur propre de A.

Remarque : Comme on l'a déjà vu dans le chapitre 5 **Matrices inversibles**, disposer d'un polynôme annulateur permet également, dans certains cas, d'obtenir l'inversibilité et l'inverse d'une matrice.
Par exemple, on a vu que le polynôme $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$M^3 + M^2 + I_3 = O_3$$

Donc,

$$M^3 + M^2 = -I_3$$

Donc,

$$-M^3 - M^2 = I_3$$

Donc,

$$M(-M^2 - M) = I_3$$

Donc, M est inversible et $M^{-1} = -M^2 - M$.

3. Diagonalisation pratique

Théorème 2 :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ avec $V_1, V_2, \dots, V_n$ des vecteurs propres associés.
Alors, la matrice P obtenue en juxtaposant les matrices colonnes $V_1, V_2, \dots, V_n$ est inversible et en notant D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, on a :

$$A = PDP^{-1}$$

Remarque :

- Dans le cas $n = 2$, le théorème précédent se réécrit :
  On suppose que A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ayant deux valeurs λ_1 et λ_2, $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_1, $V_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_2.
  Alors la matrice $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible et en notant D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, alors on a :
  $$A = PDP^{-1}$$
- Dans le cas $n = 3$, le théorème précédent se réécrit :
  On suppose que A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ayant trois valeurs λ_1, λ_2 et λ_3, $V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_1, $V_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_2 et $V_3 = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_3.
  Alors la matrice $P = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ est inversible et en notant D la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, alors on a :
  $$A = PDP^{-1}$$

Exemple : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $P = X^2 - 2X - 3$ est annulateur de A.
2. Calculer les racines α et β de P.
3. Montrer que α et β sont des valeurs propres de A et calculer les vecteurs propres associés.
4. Justifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Donc,

$$A^2 - 2A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

Donc, $X^2 - 2X - 3$ est annulateur de A.

2. P est un polynôme de degré 2. Calculons son discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. P a donc deux racines :

$$\alpha = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

3. Montrons tout d'abord que 3 est valeur propre :

$$\begin{aligned} AX = 3X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = 3X$ et c'est une matrice colonne non nulle. Donc, 3 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Montrons maintenant que -1 est valeur propre :

$$\begin{aligned} AX = -X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = -y \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation $AX = -X$ et c'est une matrice colonne non nulle. Donc, -1 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

4. D'après le cours, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et, en notant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a :

$$A = PDP^{-1}$$

Autrement dit, A est diagonalisable.

4. Exercices

9.1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre que l'on précisera.
2. Vérifier que $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre que l'on précisera.
3. Vérifier que $Z = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à une valeur propre que l'on précisera.

9.2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $2A^3 - 3A^2 + A$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A.
3. Déterminer lesquelles sont effectivement valeurs propres et trouver des vecteurs propres associés.

9.3 On donne $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $B^2 - 2B + 2I$ puis en déduire que la matrice B n'a aucune valeur propre.
2. En déduire également que B est inversible et donner son inverse en fonction de B et I.

9.4 On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. À l'aide de la proposition 4 du cours, donner un polynôme annulateur de B.
2. En déduire que B n'admet pas de valeur prope.

9.5 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier l'égalité $M^2 - M - 6I = 0$ et en déduire les valeurs propres possibles de M.
2. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de M et donner un vecteur propre pour chacune d'elle.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible.
4. On pose $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier l'égalité $MP = PD$.
   Que peut-on en déduire ?

9.6 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'on a $A(A-I)(A-2I) = O_3$ et en déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elle.
3. En déduire une matrice P inversible telle que $AP = PD$ ou D est une matrice diagonale à préciser.

9.7 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X^2 + 4$ est annulateur de A et en déduire les valeurs propres possibles de A.
2. Vérifier que :
   - $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée.
   - $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée.
   - $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A et préciser la valeur propre associée.
3. On note P la matrice dont la première colonne est V_1, la seconde est V_2 et la dernière est V_3.
   Calculer $P^3 - 3P^2 + 5P - 3I_3$.
   En déduire que P est inversible et préciser une expression de P^{-1} en fonction de I_3, P et P^2.
4. Vérifier l'égalité $AP = PD$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. En déduire que A est diagonalisable.

9.8 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = v_0 = w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rclcrcr} u_{n+1} & = & 2u_n & - & v_n & + & w_n \\ v_{n+1} & = & u_n & & & - & w_n \\ w_{n+1} & = & 2u_n & - & 2v_n & + & w_n \end{array} \right.$$

1. Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Vérifier que le polynôme $P = (X-1)(X+1)(X-3)$ est annulateur de A.
4. Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser.
5. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression explicite de A^n.
6. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, une expression explicite de u_n, v_n et w_n.

9.9 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Calculer A^2 et $8A - 15I$ puis déterminer un polynôme annulateur de A. En déduire les valeurs propres possibles de A.

   b. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de A et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.

2. **a.** Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et donner son inverse.

   b. Soit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $AP = PD$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$, puis donner l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier n.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n \end{cases}$$

   a. On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^nX_0$, puis donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

9.10 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses trois premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = -2$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = 6u_n - 11u_{n+1} + 6u_{n+2}$$

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $MX_n = X_{n+1}$. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. **a.** Calculer $(M-I)(M-2I)(M-3I)$ puis en déduire les valeurs propres possibles de M.

   b. Vérifier que les valeurs trouvées à la question précédente sont effectivement valeurs propres de M et donner un vecteur propre pour chacune d'elles.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

   Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $MP = PD$.

   b. La matrice M est-elle diagonalisable ?

4. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a $M^n = PD^nP^{-1}$.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n, les coefficients de la première ligne de M^n. Donner alors l'expression de u_n en fonction de n.

5. Table des matières