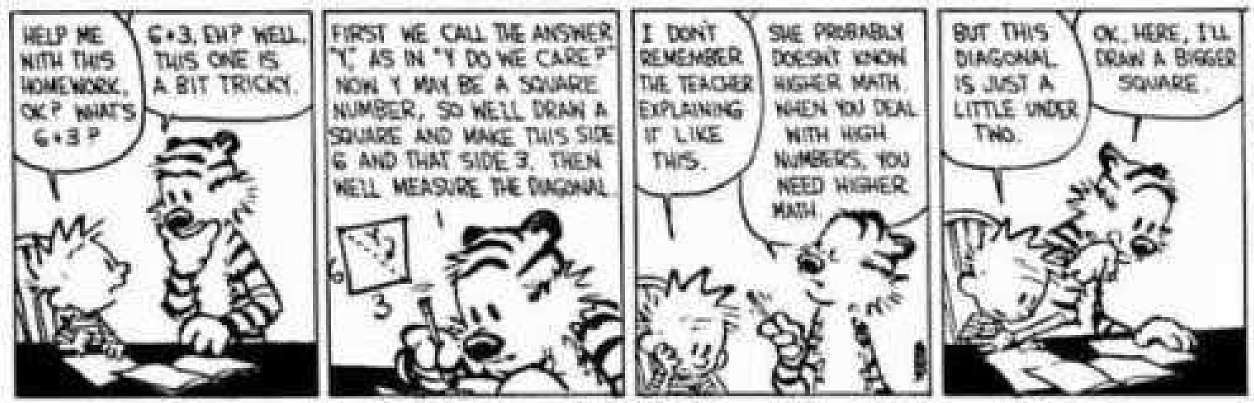
Cours de mathématiques
ECT 2ème année

Chapitre 8
Variables aléatoires à densité



Adrien Fontaine
Année scolaire 2019–2020

1. Rappels sur la fonction de répartition

Définition 1 :

Soit X une variable aléatoire. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F_X définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Proposition 1 :

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \cdots\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots$. Alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1 \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_k) & \text{si} \quad x_k \leqslant x < x_{k+1} \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant \max_{i \in \mathbb{N}} x_i \end{cases}.$$

En particulier, F_X est constante sur $[x_k ; x_{k+1}[$.

Exemple : Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1 €. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4 €, si on a un numéro pair on reçoit 2 € et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1 ; 1 ; 3\}$.

La loi de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{2}{5}, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}, \qquad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{5}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

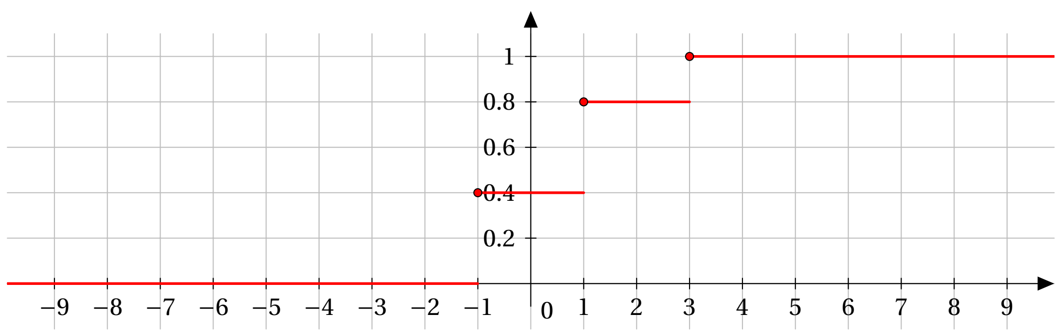
x	-1	1	3	Total
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

Dès lors,

- Si $x < -1$, alors $F_X(x) = 0$.
- Si $-1 \leqslant x < 1$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(X = -1) = \dfrac{2}{5}$.
- Si $1 \leqslant x < 3$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{5}$.
- Si $x \geqslant 3$, alors $F_X(x) = 1$.

Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{2}{5} & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ \frac{4}{5} & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \end{cases}.$$



2. Généralités

2.1. Notion de variable aléatoire à densité

Définition 2 :

Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si, et seulement si, il existe une fonction f vérifiant les quatre conditions suivantes :

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels;
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$;
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Lorsque les conditions précédentes sont vérifiées, f est appelée **densité de** X.

Définition 3 :

Une fonction f est une **densité de probabilité** (ou plus simplement **densité**) si, et seulement si :

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuité;
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Exemple : On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{array}$$

La fonction f est une densité de probabilité.

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $(1+e^x)^2 > 0$. Et donc, $f(x) > 0$.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- Soit $M \geqslant 0$. Calculons :

$$\int_0^M \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ est de la forme $\dfrac{-u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1+e^x$. Par ailleurs,

$$\frac{-u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$

Donc, une primitive est donnée par :

$$-\frac{1}{u(x)} = \frac{-1}{1+e^x}$$

Dès lors,

$$\int_0^M \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^M = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^M}$$

Enfin,

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{e^M} = 1$$

Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

De même, pour $m \leqslant 0$:

$$\int_m^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_m^0 = \frac{1}{1+e^m} - \frac{1}{2}$$

Et

$$\lim_{m\to-\infty} \frac{1}{1+e^m} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

Donc, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Bref, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

La fonction f vérifie donc bien les trois points de la définition ci-dessus. Donc, f est bien une densité de probabilité.

Théorème 1 :

Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X et de densité f, alors, en chaque réel x où f est continue, on a : $f(x) = F_X'(x)$.

Théorème 2 :

Si X est une variable à densité de densité, de fonction de répartition F_X, alors toute fonction f à valeurs positives qui vérifie $f(x) = F_X'(x)$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points) est une densité de X.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$.
On admet que X est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de X.
La fonction F_X est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Donc, une densité de f est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Remarque : Il n'y a pas unicité d'une densité pour une variable à densité donnée. En effet, si f est une densité de X, alors toute fonction g positive, égale à f, sauf en un nombre fini de points, est également une densité de X.

2.2. Calculs de probabilités avec des variables aléatoires à densité

Proposition 2 :

Soit X une variable aléatoire à densité, F_X sa fonction de répartition et f_X une densité de X.
Soient a et b deux réels avec $a < b$. On rappelle que $\mathbb{P}(X \leqslant a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$. Alors :

- $$\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt$$
- $$\mathbb{P}(X = a) = 0$$
- $$\mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{P}(X > a) = 1 - F_X(a) = \int_{a}^{+\infty} f_X(t)\,dt$$
- $$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(t)\,dt$$

Exemple :

1. Soit X une variable aléatoire, de fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 1 - \frac{8}{x^3} & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$.
On admet que X est une variable aléatoire à densité. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$, $\mathbb{P}(-1 \leqslant X < 3)$ et $\mathbb{P}(X < 4)$.
D'après la proposition ci-dessus, on a :
$$\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1 - F_X(0) = 1 - 0 = 1$$
$$\mathbb{P}(-1 \leqslant X < 3) = F_X(3) - F_X(-1) = 1 - \frac{8}{3^3} - 0 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$
$$\mathbb{P}(X < 4) = F_X(4) = 1 - \frac{8}{4^3} = 1 - \frac{8}{64} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

2. Soit X une variable aléatoire à densité, de densité $f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ e^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$, $\mathbb{P}(2 < X \leqslant 3)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.
D'après la proposition ci-dessus, on a :
$$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(t)\,dt = \int_{0}^{2} e^{-t}\,dt \qquad \text{car } f_X(t) = 0 \text{ si } t \leqslant 0$$
$$\mathbb{P}(2 < X \leqslant 3) = \int_{2}^{3} f_X(t)\,dt = \int_{2}^{3} e^{-t}\,dt$$
$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = \int_{1}^{+\infty} f_X(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-t}\,dt$$
Une primitive de e^{-t} est donnée par $-e^{-t}$, donc :
$$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \int_{0}^{2} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^2 = 1 - e^{-2}$$
$$\mathbb{P}(2 < X \leqslant 3) = \int_{2}^{3} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_2^3 = e^{-2} - e^{-3}$$

Enfin, soit $M \geqslant 1$. On a :

$$\int_1^M e^{-t}\,dt = \Big[-e^{-t}\Big]_1^M = e^{-1} - e^{-M}$$

Or,

$$\lim_{M\to+\infty} e^{-1} - e^{-M} = e^{-1}$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-1}$$

2.3. Espérance d'une variable à densité

Définition 4 :

Sous réserve de convergence de l'intégrale écrite, l'espérance de X est le réel, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$ X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Il nous faut étudier la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

Comme f est nulle sur $]-\infty;0]$, l'intégrale sur $]-\infty;0]$ converge et vaut 0. Par ailleurs, soit $M \geqslant 0$. Calculons :

$$\int_0^M te^{-t}\,dt$$

Pour cela, on effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^M te^{-t}\,dt &= \Big[-te^{-t}\Big]_0^M + \int_0^M e^{-t}\,dt \\ &= -Me^{-M} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^M \\ &= -Me^{-M} + 1 - e^{-M} \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{M\to+\infty} -Me^{-M} + 1 - e^{-M} = 1$$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = 1$$

Bref, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Ainsi, X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = 1$$

Proposition 3 :

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et soient a et b deux réels. Si $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

2.4. Variance d'une variable aléatoire à densité

Définition 5 :

Une variable aléatoire X de densité f admet un moment d'ordre 2 lorsque X^2 admet une espérance. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre 2 de X, le réel :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 6 :

Si une variable aléatoire X de densité f admet un moment d'ordre 2, alors on appelle variance de X, et on note $\mathbb{V}(X)$, le réel défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 7 :

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, on appelle écart-type de X, le réel positif, noté σ_X, défini par :

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Théorème 3 : Formule de König-Huygens

Si X est une variable aléatoire à densité possédant une variance, alors on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Méthode 1 : Montrer qu'une variable à densité possède une variance et la calculer

- Si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
- Si X admet une espérance, il faut regarder si $\mathbb{E}(X^2)$ existe.
  - Si non, alors X n'admet pas de variance.
  - Si oui, alors on utilise la formule de König-Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2,$$

pour la calculer.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$ X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

On a déjà vu que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = 1$. Regardons si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, *i.e* si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ converge.

Comme f est nulle sur $]-\infty;0]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ converge et vaut 0. Soit maintenant $M \geqslant 0$. Calculons :

$$\int_0^M t^2 f(t)\,dt = \int_0^M t^2 e^{-t}\,dt$$

Pour cela, on effectue une première intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} u(t) &= t^2 \\ v'(t) &= e^{-t} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) &= 2t \\ v(t) &= -e^{-t} \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^M t^2 e^{-t}\,dt &= \left[-t^2 e^{-t}\right]_0^M + 2\int_0^M t e^{-t}\,dt \\ &= -M^2 e^{-M} + 2\int_0^M t e^{-t}\,dt \end{aligned}$$

Or, on a déjà vu que :

$$\int_0^M t e^{-t}\,dt = -Me^{-M} + 1 - e^{-M}$$

Donc,

$$\int_0^M t^2 e^{-t}\,dt = -M^2 e^{-M} - 2Me^{-M} + 2 - 2e^{-M}$$

Or,

$$\lim_{M \to +\infty} -M^2 e^{-M} - 2Me^{-M} + 2 - 2e^{-M} = 2$$

Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 2. Donc, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 2. Autrement dit, $\mathbb{E}(X^2)$ existe et vaut 2.

Donc, X admet une variance que l'on peut obtenir par la formule de König-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 - 1^2 = 1$$

Proposition 4 :

Si X est une variable aléatoire possédant une variance, alors quels que soient les réels a et b, $aX + b$ admet une variance, et on a :

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

Exemple : On reprend la variable aléatoire X de l'exemple précédent, et on note $Y = 3 - 2X$. Y admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

D'après la propriété ci-dessus, Y admet une variance et :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(3 - 2X) = (-2)^2 \mathbb{V}(X) = 4 \times 1 = 4$$

3. LOIS USUELLES À DENSITÉ

3.1. Loi uniforme sur un intervalle

Dans ce paragraphe, a et b sont des nombres réels avec $a < b$.
La loi uniforme sur $[a;b]$ est la loi du tirage au hasard d'un nombre dans cet intervalle : la variable X a autant de chance de tomber n'importe où dans l'intervalle $[a;b]$.

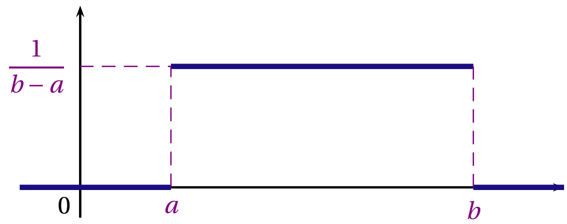
Définition 8 :

On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[a;b]$ lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a;b] \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [a;b] \end{cases}$$

On note : $X \sim \mathcal{U}([a;b])$.

Remarque :



La fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ est bien une densité de probabilité sur $[a;b]$:

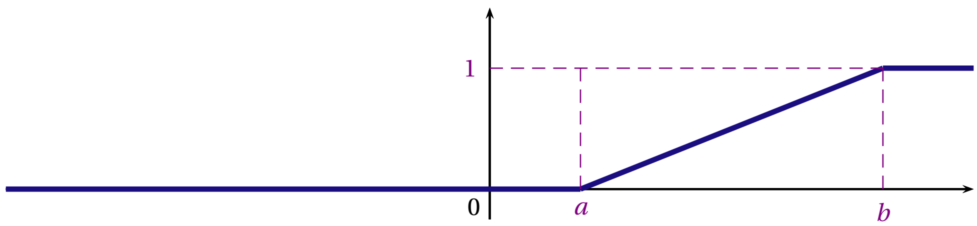
- f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a;b\}$ et positive.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1.$

Proposition 5 :

Si $X \sim \mathcal{U}([a;b])$, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a;b] \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

Donnons la représentation graphique de F_X :



Proposition 6 :

Si $X \sim \mathcal{U}([a;b])$, alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemple : Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,5;9,5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

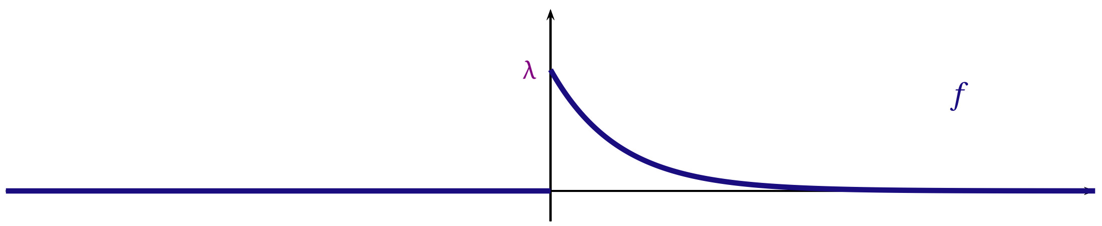
1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est :
$$P(X \leqslant 2) = F_X(2) = \frac{2-0,5}{9} = \frac{1}{6}$$
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est :
$$P(X \geqslant 3) = 1 - F_X(3) = \frac{9,5-3}{9} = \frac{13}{18}$$
3. L'espérance mathématique de T est
$$E(T) = \frac{0,5+9,5}{2} = 5$$
Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

3.2. Loi exponentielle

Dans ce paragraphe, λ désigne un nombre réel strictement positif.

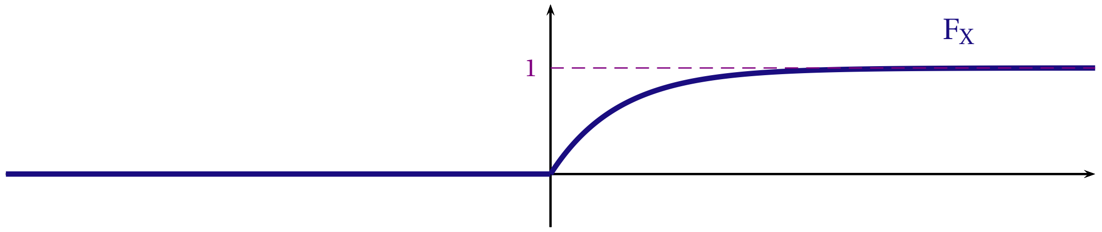
Définition 9 :

On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par :
$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$
On note $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$.



Proposition 7 :

Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par :
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



Proposition 8 :

Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance, et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Remarque : Les lois exponentielles sont utilisées pour modéliser des « durées de vie ».

3.3. Loi normale

Dans ce paragraphe, m désigne un nombre réel et σ un réel strictement positif.

Définition 10 :

On dit que X suit la **loi normale** de paramètre m et σ^2 lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

On note $X \sim \mathscr{N}(m, \sigma^2)$.

Proposition 9 :

Si $X \sim \mathscr{N}(m, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = m \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

3.4. Loi normale centrée réduite

Définition 11 :

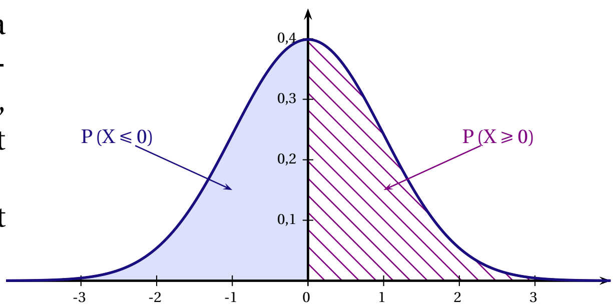
On dit que X suit la **loi normale centrée réduite** lordque X est la variable aléatoire de densité f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

On note $X \sim \mathscr{N}(0, 1)$.

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les probabilités $P(X \leqslant 0)$ et $P(X \geqslant 0)$ sont égales.
Comme $P(X \leqslant 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$



Définition 12 :

La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{N}(0,1)$ est la fonction, notée Φ, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

Théorème 4 :

On a déjà vu que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. Plus généralement, pour tout réel x, on a :

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Remarque : On ne sait pas expliciter Φ à l'aide des fonctions usuelles.

Proposition 10 :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = 1$$

Théorème 5 :

Soit X une variable aléatoire. Alors :

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m,\sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0,1)$$

Fonction de répartition Φ d'une variable aléatoire X suivant la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

4. Exercices

8.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X admettant f pour densité.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{4})$ et $\mathbb{P}(X > \frac{9}{10})$.

8.2 Déterminer l'unique nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

8.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X admettant f pour densité.
3. Déterminer l'espérance de X.
4. On pose $Y = 3X + 2$. Alors Y est à densité. Déterminer sa fonction de répartition F_Y.
5. Déterminer une densité f_Y de Y.
6. Déterminer l'espérance de Y.

8.4 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Justifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer :

   a. $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$

   b. $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$

   c. $\mathbb{P}(X > 1)$

   d. $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$

   e. $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$

   f. $\mathbb{P}(X \in]2;3[)$

8.5 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1;2]$. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = 3X$. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de Y. On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y.

1. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.

2. Justifier que, pour tout réel y, on a :

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{3}\right)$$

3. En déduire, pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$. (*on fera une distinction des cas selon les valeurs de y*).
4. En déduire la loi de Y.

8.6 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \frac{1}{2}X$. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de Y. On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de F_Y.

1. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.
2. Justifier que, pour tout réel y, on a :

$$F_Y(y) = F_X(2y)$$

3. En déduire, pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$ en distinguant les cas $y < 0$ et $y \geqslant 0$.
4. En déduire la loi de Y.
5. Déterminer $\mathbb{P}(Y \leqslant 3)$ et $\mathbb{P}_{[Y\leqslant 3]}(Y > 1)$.

8.7 La nuit, dans la savane, un lion se rend à la rivière pour boire et y reste un quart d'heure. Après de nombreuses observations, on estime que l'instant d'arrivée T du lion à la rivière se situe entre 0h (minuit) et 2h du matin. La variable aléatoire T, exprimée en heures, est une variable aléatoire dont une densité de probabilité est la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{3}{4}t(2-t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad t > 2 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Un observateur se présente à la rivière à 0h30 min et y reste un quart d'heure. Quelle est la probabilité pour qu'il aperçoive le lion ?

8.8 Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par :

- X_1 est le temps, exprimé en heures écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne ;
- X_2 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première panne, et la panne suivante ;
- X_3 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la seconde panne et la panne suivante.

Après la troisième panne, l'utilisation de la machine est suspendue. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes et suivent toutes les trois la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement de la machine entre la mise en route de la machine et la première panne ? Entre la mise en route de la machine après la première panne et la seconde panne ? Entre la mise en route de la machine après la seconde panne et la troisième panne ?

2. Déterminer la probabilité de l'évènement E : « chacune des trois périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures ».

8.9 d'après ESCP 2014

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2(t-a)} & \text{si} \quad t \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **a.** Soit B un réel supérieur ou égal à a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^B 2e^{-2(t-a)}\,dt$.
   b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)}\,dt$.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-a)} & \text{si} \quad x \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = X - a$.
   a. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
   b. En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   c. Donner la valeur de l'espérance de Y.
   d. En déduire que X admet une espérance et donner sa valeur.

8.10 d'après ESC 2010

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{si} \quad t \in]0;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. **a.** Montrer que f est une densité de probabilité.
   b. On note désormais X une variable aléatoire de densité f, et on note F sa fonction de répartition. Rappeler l'intégrale permettant de calculer $F(x)$ en fonction de la densité f. Calculer $F(x)$ en séparant les cas $x \leqslant 0$, $x \in]0;2]$ et $x > 2$.
   c. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$ et la probabilité $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leqslant 1)$.
2. Déterminer l'espérance de X.
   Soient U la variable aléatoire définie par $U = X^2$ et G sa fonction de répartition.
3. Déterminer $U(\Omega)$ puis justifier que $G(x) = 0$ si $x \leqslant 0$, et que $G(x) = 1$ si $x > 4$.
4. **a.** Justifier l'égalité des évènements $[U \leqslant 2]$ et $[-\sqrt{2} \leqslant X \leqslant \sqrt{2}]$, puis en déduire $G(2)$.
   b. Plus généralement, montrer que si $0 < x \leqslant 4$, alors $G(x) = \frac{1}{4}x$.
   c. Dresser un bilan pour la fonction G puis reconnaître la loi de U.
   d. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(U)$ puis la valeur de la variance de X.

8.11

1. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
   a. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$.
   b. Calculer $\mathbb{P}(X > 3)$.
   c. Calculer $\mathbb{P}(-1,96 < X < 1,96)$.
2. Soit $X \sim \mathcal{N}(-3,1)$.
   a. Calculer $\mathbb{P}(X < -1)$.
   b. Calculer $\mathbb{P}(X > -5)$.
   c. Calculer $\mathbb{P}(-5 < X < -1)$.
3. Soit $X \sim \mathcal{N}(8,4)$.
   a. Calculer $\mathbb{P}(X < 7,5)$.
   b. Calculer $\mathbb{P}(X > 8,5)$.
   c. Calculer $\mathbb{P}(6,5 < X < 10)$.

8.12 La variable aléatoire qui correspond aux commandes quotidiennes en antalgiques (aspirine, ibuprofène, etc) suit une loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 20. Le stock disponible en début de matinée est de 300 antalgiques. Quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

8.13 Après une enquête, on estime que le temps de passage en caisse, exprimé en unité de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Exprimer chacune des probabilités $\mathbb{P}(T \leqslant 2)$, $\mathbb{P}(T \geqslant 1)$ et $\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 4)$ sous forme d'une intégrale.
2. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.
3. Utiliser la question précédente pour justifier que f est une densité de probabilité puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera. Quel est le temps moyen de passage en caisse ?
4. Démontrer que la fonction de répartition F_T de T est définie par :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités de temps sachant qu'il est supérieur à une unité de temps est égale à :

$$\frac{2e-3}{2e}$$

5. Corrigé des exercices

8.1

1. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :
   - f est continue partout sauf en 1
   - on a $f(x) = 2x$ si $x \in [0;1]$ ou $f(x) = 0$. Dans les deux cas, $f(x) \geqslant 0$.
   - enfin, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} = \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

   Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. On distingue trois cas :
   - si $x < 0$, alors $\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$;
   - si $x \in [0:1]$, alors $\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^x = x^2$.
   - si $x \geqslant 1$, alors $\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 1$.

   En résumé, on a :

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

3. On a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant \frac{1}{2}) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leqslant \mathrm{X} \leqslant \frac{3}{4}) = \mathrm{F}(\frac{3}{4}) - \mathrm{F}(\frac{1}{4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > \frac{9}{10}) = 1 - \mathrm{F}(\frac{9}{10}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}$$

8.2 Tout d'abord, pour que f soit une densité de probabilité, il faut que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaille 1. Or,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_0^1 ax(1-x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} \\ &= \int_0^1 ax - ax^2\,\mathrm{d}x \\ &= \left[a\frac{x^2}{2} - a\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a}{3} \\ &= \frac{a}{6}\end{aligned}$$

On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Longleftrightarrow a = 6$. Par ailleurs, si $a = 6$, alors on a bien :

- f est continue partout sauf en 1 ;
- $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0;1]$ et 0 sinon. Dans tous les cas, on a bien $f(x) \geqslant 0$.

Ainsi, f est une densité de probabilité si, et seulement si, $a = 6$.

8.3

1. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :
   - f est continue partout sauf en 1
   - on a $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0;1]$ ou $f(x) = 0$. Dans les deux cas, $f(x) \geqslant 0$.
   - enfin, on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut } 0} + \int_0^1 6x(1-x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut } 0}\\ &= \int_0^1 6x - 6x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \left[3x^2 - 2x^3\right]_0^1\\ &= 3 - 2 = 1\end{aligned}$$

   Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. On distingue trois cas :
   - si $x < 0$, alors $\mathrm{F_X}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$;
   - si $x \in [0:1]$, alors $\mathrm{F_X}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x 6t - 6t^2\,\mathrm{d}t = \left[3t^2 - 2t^3\right]_0^x = 3x^2 - 2x^3$.
   - si $x \geqslant 1$, alors $\mathrm{F_X}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 6t(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 1$.

   En résumé, on a :

$$\mathrm{F_X}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ 3x^2 - 2x^3 & \text{si } x \in [0;1]\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1\end{cases}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x \times 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut } 0} + \int_0^1 x \times 6x(1-x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^{+\infty} x \times 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut } 0}\\ &= \int_0^1 6x^2 - 6x^3\,\mathrm{d}x\\ &= \left[2x^3 - 6\frac{x^4}{4}\right]_0^1\\ &= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. On a :

$$\mathrm{F_Y}(y) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant y) = \mathbb{P}(3\mathrm{X} + 2 \leqslant y) = \mathbb{P}(3\mathrm{X} \leqslant y - 2) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant \frac{y-2}{3}) = \mathrm{F_X}(\frac{y-2}{3})$$

Et donc,

$$\mathrm{F_Y}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{y-2}{3} < 0 \\ 3\left(\frac{y-2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{y-2}{3}\right)^3 & \text{si } \frac{y-2}{3} \in [0;1] \\ 1 & \text{si } \frac{y-2}{3} \geqslant 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 2 \\ \frac{-2y^3+21y^2-60y+20}{27} & \text{si } y \in [2;5] \\ 1 & \text{si } y \geqslant 5 \end{cases}$$

5. Une densité f_Y de Y est donnée par la dérivée de $\mathrm{F_Y}$ (partout où $\mathrm{F_Y}$ est dérivable). Ainsi, une densité est donnée par :

$$f_\mathrm{Y}(y) = \begin{cases} \frac{-6y^2+42y-60}{27} & \text{si } y \in [2;5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. On a :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}(3\mathrm{X}+2) = 3\mathbb{E}(\mathrm{X}) + 2 = 3 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

8.4

1. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :

- f est continue partout sauf en 1
- on a $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x > 1$ ou $f(x) = 0$. Dans les deux cas, $f(x) \geqslant 0$.
- il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Or,

$$\int_{1}^{\mathrm{M}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{M}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{M}}$$

Et $\displaystyle\lim_{\mathrm{M}\to+\infty} 1 - \frac{1}{\mathrm{M}} = 1$. Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}$ ÂÍ$+\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut bien 1.

Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. On a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > 1) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 1) = 1 - 0 = 1$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \in]2;3[) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \in]2;3]) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 3) - \mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant 2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

8.5

1. D'après le cours, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \in [1;2] \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(3X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant \frac{y}{3}) = F_X\left(\frac{y}{3}\right)$$

3. On a donc :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{y}{3} < 1 \\ \frac{y}{3}-1 & \text{si} \quad \frac{y}{3} \in [1;2] \\ 1 & \text{si} \quad \frac{y}{3} > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 3 \\ \frac{y-3}{3} & \text{si} \quad y \in [3;6] \\ 1 & \text{si} \quad y > 6 \end{cases} \end{aligned}$$

4. On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[3;6]$ donc $Y \sim \mathscr{U}([3;6])$.

8.6

1. D'après le cours, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(\frac{1}{2}X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant 2y) = F_X\left(2y\right)$$

3. On a donc :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \begin{cases} 1-e^{-2y} & \text{si} \quad 2y \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad 2y < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1-e^{-2y} & \text{si} \quad y \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4. On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 donc $Y \sim \mathscr{E}(2)$.
5. On a :

$$\mathbb{P}(Y \leqslant 3) = F_Y(3) = 1 - e^{-6}$$

Par ailleurs, d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\mathbb{P}_{[Y \leqslant 3]}(Y > 1) = \frac{\mathbb{P}(1 < Y \leqslant 3)}{\mathbb{P}(Y \leqslant 3)}$$

Or,

$$\mathbb{P}(1 < Y \leqslant 3) = F_Y(3) - F_Y(1) = 1 - e^{-6} - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-6}$$

Et donc,

$$\mathbb{P}_{[Y\leqslant 3]}(Y > 1) = \frac{e^{-2} - e^{-6}}{1 - e^{-6}}$$

8.7

1. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :
- f est continue sur $\mathbb{R}$
- on a $f(t) = \frac{3}{4}t(2-t)$ si $t \in [0;2]$ ou $f(t) = 0$. Dans les deux cas, $f(t) \geqslant 0$.
- il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_0^2 \frac{3}{4}t(2-t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut 0}} \\ &= \int_0^2 \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3\right]_0^2 \\ &= 3 - 2 = 1\end{aligned}$$

Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. Il nous faut calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \leqslant T \leqslant \frac{3}{4})$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\frac{1}{2} \leqslant T \leqslant \frac{3}{4}) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \\ &= \frac{41}{256}\end{aligned}$$

8.8

1. La durée moyenne de fonctionnement entre la mise en route de la machine et la première panne est :

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Puisque X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1, la durée moyenne de fonctionnement entre la première et la seconde panne, est la même qu'entre la seconde et la troisième panne, et vaut donc 2 heures.

2. On a :

$$\mathbb{P}(E \geqslant 2) = \mathbb{P}([X_1 \geqslant 2] \cap [X_2 \geqslant 2] \cap [X_3 \geqslant 2]) = \mathbb{P}(X_1 \geqslant 2)^3 = \left(1 - F_{X_1}(2)\right)^3$$

puisque X_1, X_2 et X_3 suivent toutes la même loi et sont mutuellement indépendantes. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E \geqslant 2) = \left(1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}})\right)^3 = e^{-\frac{3}{2}}$$

8.9

1. a. On a :

$$\int_a^B 2e^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-2(t-a)}\right]_a^B = 1 - e^{-(B-a)}$$

b. On a :

$$\lim_{B\to+\infty} 1 - e^{-(B-a)} = 1$$

Donc, l'intégrale converge et $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t = 1$

2. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :
- f est continue partout sauf en a.
- on a $f(t) = 2e^{-2(t-a)}$ si $t \geqslant a$ ou $f(t) = 0$. Dans les deux cas, $f(t) \geqslant 0$.
- il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut 0}} + \underbrace{\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut 1 d'après 1.b.}} = 1$$

3. Distinguons deux cas :
- si $x < a$, alors $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$;
- si $x \geqslant a$, alors $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}t + \int_a^x 2e^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t = 1 - 2e^{-2(x-a)}$ d'après le calcul de la question **1.a.**.

En résumé, on a bien :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. a. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X - a \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant y + a = F_X(y+a)$$

Et donc,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-2(y+a-a)} & \text{si } y + a \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 - e^{-2y} & \text{si } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b. On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2, donc $Y \sim \mathscr{E}(2)$.

c. On a donc :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$$

d. Puis,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y + a) = \mathbb{E}(Y) + a = \frac{1}{2} + a$$

8.10

1. a. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :

- f est continue partout sauf en 2
- on a $f(t) = \frac{1}{2}t$ si $t \in [0;2]$ ou $f(t) = 0$. Dans les deux cas, $f(t) \geqslant 0$.
- il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut } 0} + \int_0^2 \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut } 0} \\ &= \left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4} \times 4 = 1\end{aligned}$$

Donc, f est bien une densité de probabilité.

b. Rappelons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Distinguons les cas suivants :

- si $x \leqslant 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$;
- si $x \in [0;2]$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^x = \frac{1}{4}x^2$;
- si $x \geqslant 2$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^2 \frac{1}{2}t\,\mathrm{d}t + \int_2^x 0\,\mathrm{d}t = 1$.

En résumé, on a :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{si } x \in [0;2] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

c. On a alors :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1) = F(1) = \frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X \leqslant 1) = F(1) - F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0t \times 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut } 0} + \int_0^2 t \times \frac{1}{2} t\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_2^{+\infty} t \times 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut } 0} \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{6} t^3\right]_0^2 \\
&= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

3. Puisque $X(\Omega) = [0;2]$ et que $U = X^2$ alors, $U(\Omega) = [0;4]$. On a :
- si $x \leqslant 0$, alors $G(x) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant x) = 0$ puisqu'un carré ne peut pas être négatif.
- si $x > 4$, alors $G(x) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x})$. Or, si $x > 4$, alors $\sqrt{x} > 2$, donc $F(\sqrt{x}) = G(x) = 1$.

4. **a.** Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$[U(\omega) \leqslant 2] \iff [X(\omega)^2 \leqslant 2] \iff [-\sqrt{2} \leqslant X(\omega) \leqslant \sqrt{2}]$$

Donc, on a bien :

$$[U \leqslant 2] = [-\sqrt{2} \leqslant X \leqslant \sqrt{2}]$$

b. Plus généralement, pour tout $x \in [0;4]$, on a :

$$[U \leqslant x] = [-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]$$

Donc,

$$G(x) = \mathbb{P}(U \leqslant x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{x}\right)^2 - 0 = \frac{1}{4}x$$

c. En résumé, on a :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4}x & \text{si } x \in [0;4] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;4]$. Ainsi, $U \sim \mathscr{U}([0;4])$.

d. D'après le cours,

$$\mathbb{E}(U) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

8.11

1. Si $X \sim \mathscr{N}(0,1)$ alors, d'après le tableau :

$$\mathbb{P}(X < 0) = \Phi(0) = 0,5$$

$$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-1,96 < X < 1,96) &= \Phi(1,96) - \Phi(-1,96)\\ &= \Phi(1,96) - (1 - \Phi(1,96))\\ &= 2\phi(1,96) - 1\\ &= 2 \times 0,9750 - 1\\ &= 0,95\end{aligned}$$

2. Si $X \sim \mathcal{N}(-3,1)$ alors $\dfrac{X+3}{\sqrt{1}} = X+3 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc, d'après le tableau :

$$\mathbb{P}(X < -1) = \mathbb{P}(X+3 < -1+3) = \mathbb{P}(X+3 < 2) = \Phi(2) = 0,9772$$

$$\mathbb{P}(X > -5) = \mathbb{P}(X+3 > -5+3) = \mathbb{P}(X+3 > -2) = 1 - \Phi(-2) = 1 - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) = 0,9772$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-5 < X < -1) &= \mathbb{P}(-2 < X+3 < 2)\\ &= \Phi(2) - \Phi(-2)\\ &= \Phi(2) - (1 - \Phi(2))\\ &= 2\Phi(2) - 1\\ &= 2 \times 0,9772 - 1\\ &= 0,9544\end{aligned}$$

3. Si $X \sim \mathcal{N}(8,4)$ alors $\dfrac{X-8}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc, d'après le tableau :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 7,5) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-8}{2} < \frac{7,5-8}{2}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{X-8}{2} < -0,25\right)\\ &= \Phi(-0,25)\\ &= 1 - \Phi(0,25)\\ &= 1 - 0,5987\\ &= 0,4013\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X > 8,5) = PP\left(\frac{X-8}{2} > \frac{8,5-8}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X-8}{2} > 0,25\right) = 1 - \Phi(0,25) = 0,4013$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(6,5 < X < 10) &= \mathbb{P}\left(\frac{6,5-8}{2} < \frac{X-8}{2} < \frac{10-8}{2}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(-0,75 < \frac{X-8}{2} < 1\right)\\ &= \Phi(1) - \Phi(-0,75)\\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(0,75))\\ &= 0,8413 - (1 - 0,7734) = 0,6147\end{aligned}$$

8.12 Notons X la variable aléatoire correspondant aux commandes quotidiennes en antalgiques. Alors, $\dfrac{X-250}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc,

$$\mathbb{P}(X>300)=\mathbb{P}\left(\frac{X-250}{20}>\frac{300-250}{20}\right)=\mathbb{P}\left(\frac{X-250}{20}>2,5\right)=1-\Phi(2,5)=1-0,9938=0,0062$$

La probabilité qu'il y ait rupture de stock est donc de 0,0062.

8.13

1. On a :

$$\mathbb{P}(T\leqslant 2)=\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{2} xe^{-x}\,dx=\int_{0}^{2} xe^{-x}\,dx$$
$$\mathbb{P}(T\geqslant 1)=\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{1}^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$
$$\mathbb{P}(1\leqslant T\leqslant T\leqslant 4)=\int_{1}^{4} f(x)\,dx=\int_{1}^{4} xe^{-x}\,dx$$

2. Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, alors sa densité est donnée par :

$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{1}=1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X)=\frac{1}{1^2}=1$$

3. f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :

- f est continue sur $\mathbb{R}$
- $f(x)=xe^{-x}$ si $x\geqslant 0$ et 0 sinon. Dans les deux cas, on a bien $f(x)\geqslant 0$.
- Il reste à vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1. Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx=\mathbb{E}(X)=1$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}(T)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx=\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{E}(X)^2=1+1^2=2$$

4. On distingue deux cas :

- Si $x<0$, alors $F_T(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=0$.
- SI $x\geqslant 0$, alors $F_T(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x} te^{-t}\,dt=\int_{0}^{x} te^{-t}\,dt$.
  Pour calculer cette intégrale, on fait une intégration par parties :

$$\begin{cases} u'(t) &= e^{-t}\\ v(t) &= t\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} u(t) &= -e^{-t}\\ v'(t) &= 1\end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} F_T(x)&=\int_{0}^{x} te^{-t}\,dt\\ &=\Big[-te^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x e^{-t}\,dt\\ &=-xe^{-x}+\Big[-e^{-t}\Big]_0^x\\ &=-xe^{-x}-e^{-x}+1\\ &=1-(1+x)e^{-x}\end{aligned}$$

En résumé, on a bien :

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1+x)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5. On veut calculer $\mathbb{P}_{T\geqslant 1}(T \leqslant 2)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathbb{P}_{[T\geqslant 1]}(T \leqslant 2) = \frac{\mathbb{P}(1 \leqslant T \leqslant 2)}{\mathbb{P}(T \geqslant 1)} = \frac{F_T(2)-F_T(1)}{1-F_T(1)}$$

Or,

$$F_T(2)-F_T(1) = 1-(2+1)e^{-2}-(1-(1+1)e^{-1}) = 1-3e^{-2}-1+2e^{-1}2e^{-1}-3e^{-2}$$

$$1-F_T(1) = 1-(1-(1+1)e^{-1}) = 1-1+2e^{-1} = 2e^{-1}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}_{[T\geqslant 1]}(T \leqslant 2) = \frac{2e^{-1}-3e^{-2}}{2e^{-1}} = \frac{(2e^{-1}-3e^{-2})\times e^2}{2e^{-1}\times e^2} = \frac{2e-3}{2e}$$

---

6. TABLE DES MATIÈRES