Cours de mathématiques
ECT 2ème année

Chapitre 7
Intégrales généralisées

Adrien Fontaine
Année scolaire 2020–2021

1. Rappels d'intégration sur un segment

1.1. Primitives

Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et si :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Exemple :

- $\mathrm{F} : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = 3x^3 + 6x = f(x)$
- $\mathrm{G} : x \mapsto e^x - 2$ est une primitive sur$\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto e^x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}'(x) = e^x = g(x)$
- Les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto x^2$, $\mathrm{G} : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $\mathrm{H} = x \mapsto x^2 + \mathrm{K}$, $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) = \mathrm{H}'(x) = 2x = f(x)$.
- $\mathrm{H} : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de $h : x \mapsto \ln(x)$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{H}'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x) = h(x)$.

Remarque :

- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 1 :

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est la forme $\mathrm{F} + c$ où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
  Si $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $\mathrm{F}_0(x_0) = y_0$.

Exemple : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $\mathrm{F}(1) = 0$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = 2x = f(x)$ et $\mathrm{F}(1) = 1^2 - 1 = 0$.

1.2. Primitives usuelles

Pour rechercher des primitives, on utilise les formules connues pour la dérivation, et les dérivées connues. Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue. Par ailleurs, C désigne une constante réelle.

Fonction	Primitives
A (constante)	$Ax + C$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$u'u^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C$
$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u} + C$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$
$u'e^u$	$e^u + C$

Exemple :

- Déterminer les primities de la fonction f définie par $f(x) = xe^{x^2}$.
  f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$. Or,
  $$u'(x)e^{u(x)} = 2xe^{x^2} = 2f(x)$$
  Donc, les primitives de f sont les fonctions de la forme
  $$F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

- Déterminer les primitives de la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.
  g semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$. Or,
  $$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = g(x)$$
  Donc, les primitives de g sont les fonctions de la forme
  $$G(x) = \frac{1}{u(x)} + C = \frac{1}{x^2+x+1} + C$$

- Déterminer les primitives de la fonction h définie par $h(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$.
  h semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{2x} - 1$. Or,
  $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2e^{2x}}{1e^{2x}-1} = h(x)$$

Donc, les primitives de h sont les fonctions de la forme

$$\mathrm{H}(x) = \ln|u(x)| + \mathrm{C} = \ln\left|e^{2x} - 1\right| + \mathrm{C}$$

- Déterminer les primitives de la fonction i définie par $i(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$.

  i semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1 + \ln(x)$. Or,

$$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\ln(x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{1+\ln(x)}} = \frac{1}{2}i(x)$$

  Donc, les primitives de i sont les fonctions de la forme

$$\mathrm{I}(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{1+\ln(x)}$$

- Déterminer les primitives de la fonction j définir par $j(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$.

  j semble être de la forme $u'u^{\alpha}$ avec $u(x) = x^2 + 2x + 3$ et $\alpha = -4$. Or,

$$u'(x)u(x)^{-4} = (2x+2)(x^2+2x+3)^{-4} = \frac{(2x+2)}{(x^2+2x+3)^4} = 2\frac{x+1}{(x^2+2x+3)^4} = 2j(x)$$

  Donc, les primitives de j sont les fonctions de la forme

$$\mathrm{J}(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha+1}u(x)^{\alpha+1} + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-3}(x^2+2x+1)^{-3} + \mathrm{C} = \frac{1}{6(x^2+2x+3)^3} + \mathrm{C}$$

- Déterminer les primitives de la fonction k définie par $k(x) = \frac{\ln(x)^2}{x}$.

  k semble être de la forme $u'u^{\alpha}$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $\alpha = 2$. Or,

$$u'(x)u(x)^2 = \frac{1}{x}\cdot\ln(x)^2 = \frac{\ln(x)^2}{x} = k(x)$$

  Donc, les primitives de k sont les fonctions de la forme

$$\mathrm{K}(x) = \frac{1}{\alpha+1}u(x)^{\alpha+1} = \frac{1}{3}\ln(x)^3$$

1.3. Intégration sur un segment

Définition 2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. On appelle **intégrale de** f entre a et b le nombre réel $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, noté $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque : Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple :

- $\displaystyle\int_1^3 3t^2+2t-1\mathrm{d}t = \left[t^3+t^2-t\right]_1^3 = \left(3^3+3^2-3\right)-\left(1^3+1^2-1\right) = 33-1 = 32$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \left[\ln(t)\right]_1^e = \ln(e)-\ln(1) = 1$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(e^x-e^{-x}\right)\mathrm{d}x = \left[e^x+e^{-x}\right]_{-1}^1 = e+e^{-1}-e^{-1}-e = 0$

Proposition 1 :

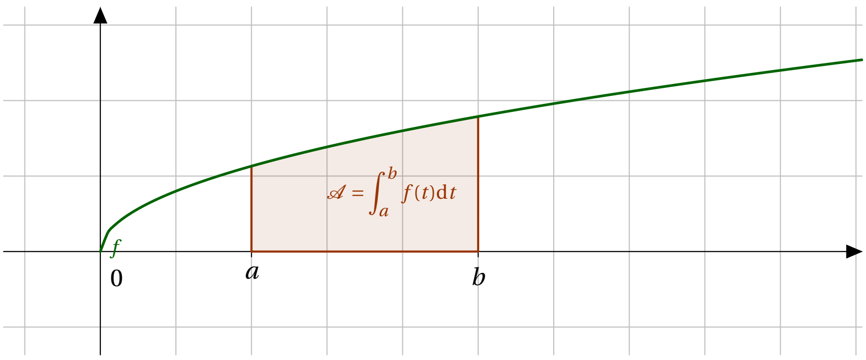
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. Soit F une primitive de f sur I. On a alors :

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 2 : Interprétation géométrique

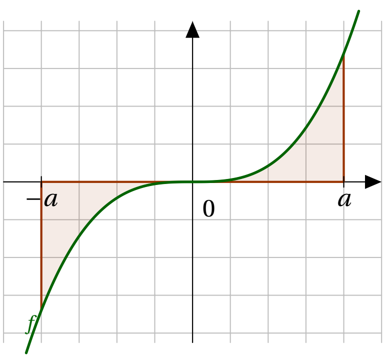
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$. Alors :

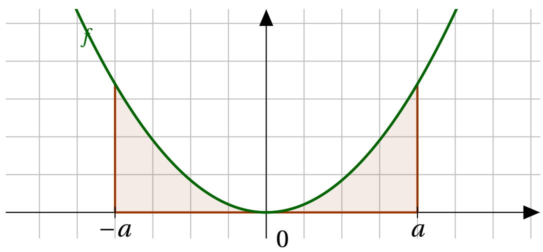
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



Proposition 3 :

- Si f est continue et paire sur $[-a;a]$, alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a;a]$ alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.





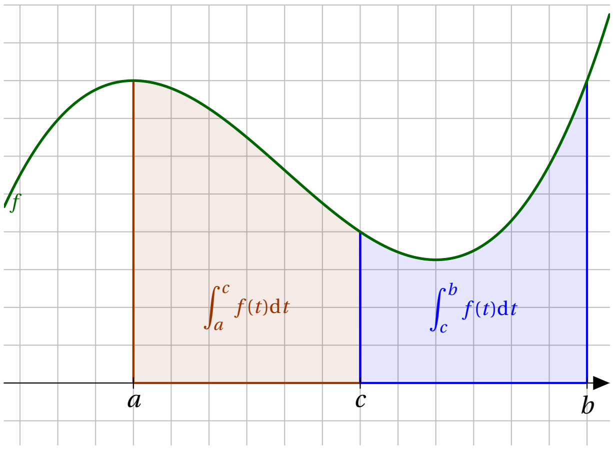
Exemple :

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{|t|}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 e^{|t|}\mathrm{d}t = 2\int_0^1 e^t\mathrm{d}t = 2\left[e^t\right]_0^1 = 2\,(e-1)$

Proposition 4 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$



Proposition 5 : Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et soient a et b dans I. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple : Calculs de :

- $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 te^t\mathrm{d}t$

  On pose

$$\begin{cases} v(t) &= t \\ u'(t) &= e^t \end{cases} \quad \text{et on a} \quad \begin{cases} v'(t) &= 1 \\ u(t) &= e^t \end{cases}$$

  Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 = \int_0^1 te^t\mathrm{d}t &= \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[u(t)v(t)\right]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\mathrm{d}t \\
&= 1\times e^1 - 0\times e^0 - \left[e^t\right]_0^1 \\
&= e - \left(e^1 - e^0\right) \\
&= e - e + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

- $I_2 = \int_1^3 \ln(x)\mathrm{d}x$
  On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} v(x) & = & \ln(x) \\ u'(x) & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et on a} \quad \left\{\begin{array}{rcl} v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ u(x) & = & x \end{array}\right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_1^3 \ln(x)\mathrm{d}x &= \int_1^3 u'(x)v(x)\mathrm{d}t \\
&= \Big[u(x)v(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= \Big[x\ln(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 x \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \Big[x\ln(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 1\mathrm{d}x \\
&= 3\ln(3) - 1\ln(1) - \Big[x\Big]_1^3 \\
&= 3\ln(3) - (3-1) \\
&= 3\ln(3) - 2
\end{aligned}$$

- $I_3 = \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$
  On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} v(x) & = & \ln(x) \\ u'(x) & = & x \end{array}\right. \quad \text{et on a} \quad \left\{\begin{array}{rcl} v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x &= \int_1^2 u'(x)v(x)\mathrm{d}t \\
&= \Big[u(x)v(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^2}{2}\ln(2) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\
&= 2\ln(2) - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

2. Intégrales généralisées

2.1. Définitions et exemples

Définition 3 :

Soit a un réel, et soit f une fonction continue sur $[a;+\infty[$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si, l'intégrale $\int_a^{M} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite <u>finie</u> lorsque M tend vers $+\infty$.
  Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et est appelée intégrale impropre de f sur $[a;+\infty[$.
- On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, si et seulement si, elle ne converge pas.

Exemple :

- Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
  Pour tout M de $[2;+\infty[$, on a :
  $$\int_2^{M} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_2^{M} = \frac{1}{2} - \frac{1}{M}$$
  Or,
  $$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{M} = \frac{1}{2}$$
  Donc, l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et
  $$\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$
- Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
  Pour tout M de $[0;+\infty[$, on a :
  $$\int_0^{M} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-x}\right]_0^{M} = 1 - e^{-x}$$
  Or,
  $$\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$$
  Donc, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et
  $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$
- Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge.
  Pour tout M de $[1;+\infty[$, on a :
  $$\int_1^{M} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[\ln(x)\right]_1^{M} = \ln(M) - \ln(1) = \ln(M)$$

Or,

$$\lim_{M\to+\infty} \ln(M) = +\infty$$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}}$ diverge. Pour tout M de $[4;+\infty[$, on a :

$$\int_4^M \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[2\sqrt{u}\right]_4^M = 2\sqrt{M} - 2\sqrt{4} = 2\sqrt{M} - 4$$

Or,

$$\lim_{M\to+\infty} 2\sqrt{M} - 4 = +\infty$$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}}$ diverge.

Définition 4 :

Soit b un réel, et soit f une fonction continue sur $]-\infty;b]$.

- On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$ converge, si et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_m^b f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque m tend vers $-\infty$.
  Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$ et est appelée intégrale impropre de f sur $]-\infty;b]$.
- On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$ diverge, si et seulement si, elle ne converge pas.

Exemple :

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-t}\,dt$ diverge.
  Pour tout m de $]-\infty;0]$, on a :

$$\int_m^0 e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_m^0 = e^{-m} - 1$$

Or,

$$\lim_{m\to-\infty} e^{-m} = +\infty$$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-t}\,dt$ diverge.

- Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^1 e^{2t}\,dt$ converge et calculer sa valeur.
  Pour tout m de $]-\infty;1]$, on a :

$$\int_m^1 e^{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_m^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{2m}$$

Or,

$$\lim_{m\to-\infty} \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{2m} = \frac{1}{2}e^2$$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^1 e^{2t}\,dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^1 e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}e^2$$

Définition 5 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** lorsque pour un réel c arbitrairement choisi, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes les deux convergentes. Dans ce cas, on note :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

Remarque :

- Une intégrale impropre n'est pas une intégrale au sens qui était celui du cours de première année : c'est une limite. En particulier, on ne peut pas intégrer $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par parties. En revanche, on peut faire une intégration par parties sur $\displaystyle\int_{a}^{M} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis passer à la limite quand M tend vers $+\infty$.
- En cas de convergence, la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du réel c choisi.

Définition 6 :

Déterminer la **nature** d'une intégrale impropre consiste à déterminer si cette intégrale impropre est convergente ou divergente.

Exemple : Étudier la nature de l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,\mathrm{d}t$$

Commençons par trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^3} = e^t(1+e^t)^{-3}$$

f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(t) = 1+e^t$ et $\alpha = -3$. Or,

$$u'(t)u(t)^{-3} = e^t(1+e^t)^{-3} = f(t)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(t) = \frac{1}{\alpha+1}u(t)^{\alpha+1} = -\frac{1}{2}u(t)^{-2} = \frac{-1}{2(1+e^t)^2}$$

On peut maintenant étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour cela, on étudie la nature des intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $M \in [0;+\infty[$. On a :

$$\int_0^M \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2(1+e^t)^2}\right]_0^M = \frac{1}{2(1+e^0)^2} - \frac{1}{2(1+e^M)^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2(1+e^M)^2}$$

Or,

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{8} - \frac{1}{2(1+e^M)^2} = \frac{1}{8}$$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt = \frac{1}{8}$$

Soit maintenant $m \in]-\infty;0]$. On a :

$$\int_m^0 \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt = \left[\frac{-1}{2(1+e^t)^2}\right]_m^0 = \frac{1}{2(1+e^m)^2} - \frac{1}{2(1+e^0)^2} = \frac{1}{2(1+e^m)^2} - \frac{1}{8}$$

Or,

$$\lim_{m\to-\infty} \frac{1}{2(1+e^m)^2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2(1+0)^2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3}\,dt = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

2.2. Un critère de convergence

Théorème 2 :

Soit a un réel. Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a;+\infty[$. Soit F la fonction :

$$F : \begin{array}{ccc} [a;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

On a les résultats suivants :

- La fonction F est croissante et positive (sur $[a;+\infty[$).
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si, et seulement si, la fonction F est majorée (sur $[a;+\infty[$). Autrement dit :

$$\exists K > 0, \qquad \int_a^x f(t)\,dt \leqslant K \qquad \text{pour tout } x \in [a;+\infty[$$

Exemple : Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge. On introduit les fonctions F et G définies par :

$$F : \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_1^x e^{-t^2}\,dt \end{array} \qquad G : \begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_1^x e^{-t}\,dt \end{array}$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.
Soit $\mathrm{M} \geqslant 1$. On a :
$$\int_1^{\mathrm{M}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_1^{\mathrm{M}} = e^{-1} - e^{-\mathrm{M}}$$
Or,
$$\lim_{\mathrm{M}\to+\infty} e^{-1} - e^{-\mathrm{M}} = e^{-1}$$
Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-1}$$

2. Montrer que, pour tout t de $[1;+\infty[$, on a :
$$e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$$
Pour tout $t \geqslant 1$, on a $t \leqslant t^2$ donc $-t^2 \leqslant -t$ donc, par croissance de la fonction exponentielle :
$$e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$$

3. En déduire que la fonction F est majorée sur $[1;+\infty[$.
D'après la question précédente, et par croissance de l'intégrale, on a pour tout $x \geqslant 1$:
$$\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
Autrement dit, pour tout $x \geqslant 1$:
$$\mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{G}(x)$$
Or, la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$. Le théorème ci-dessus s'applique donc, et la fonction G est donc croissante. Par ailleurs, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, la fonction G est majorée. Et, vu l'inégalité ci-dessus, la fonction F est également majorée sur $[1;+\infty[$.

4. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[1;+\infty[$. Le théorème ci-dessus s'applique donc. Par ailleurs, d'après la question précédente, la fonction F est majorée. Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque : Le résultat est le même pour les intégrales sur $]-\infty; b]$.

2.3. Propriétés

2.3.1 Linéarité

Proposition 6 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;+\infty[$ (avec a réel). Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors pour tout λ et μ dans $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

2.3.2 Relation de Chasles

Proposition 7 :

Soit f une fonction continue sur $[a;+\infty[$ (avec a réel) et soit $c\in[a;+\infty[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2.3.3 Positivité de l'intégrale

Proposition 8 :

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a;+\infty[$ (avec a réel) telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors :

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$;
- si f n'est pas identiquement nulle sur $[a;+\infty[$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t > 0$:
- si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors f est identiquement nulle sur $[a;+\infty[$.

2.3.4 Croissance de l'intégrale

Proposition 9 :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;+\infty[$ (avec a réel). On suppose que pour tout t dans $[a;+\infty[$, on a $f(t)\leqslant g(t)$ et que les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : Les propriétés ci-dessus restent valables pour les intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Exercices

Intégration sur un segment

7.1 Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide :

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = -\dfrac{3}{x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3}$
5. $f_5(x) = (7x+1)^8$
6. $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{x}(\ln(x))^2$
8. $f_8(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

7.2 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

1. On note α et β les deux racines de la fonction polynôme $P : x \mapsto x^2-2x-3$. Déterminer α et β.
2. Montrer qu'il existe des réels a et b tels que :
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}.$$
3. En déduire une primitive de f sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

7.3 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3+x-2)\,dx$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\,dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\,dt$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$

7.4 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

1. $I_6 = \displaystyle\int_{0}^{1} te^{2t}\,dt$
2. $I_7 = \displaystyle\int_{1}^{2} t\ln(t)\,dt$
3. $I_8 = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+1)e^{3x}\,dx$
4. $I_9 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$

7.5 L'objectif est de calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

1. **Calcul de** I. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :
$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$

a. Calculer la dérivée de f.

b. En déduire la valeur de I.

2. Calcul de J **et** K**.**

a. Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $\mathrm{J}+2\mathrm{I}=\mathrm{K}$.

b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur K, montrer que $\mathrm{K}=\sqrt{3}-\mathrm{J}$.

c. En déduire les valeurs de J et K.

7.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Calculer I_0 et I_1.

3. Étudier la monotonie de la suite I_n et montrer qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_{n+1} = e-(n+1)\mathrm{I}_n$.

5. En déduire la valeur de ℓ.

7.7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'un encadrement judicieux de I_n, déterminer la limite de la suite (I_n).

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{J}_n = n\mathrm{I}_n$.

a. Montrer que $\mathrm{J}_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$. (penser à une intégration par parties)

b. Montrer que :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

c. En déduire la limite de la suite (J_n).

7.8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

1. a. Calculer J_1.

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

c. Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\geqslant 1}$.

2. a. En intégrant par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{I}_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\mathrm{J}_{n+2}.$$

b. Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$.

Intégrales généralisées

7.9 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$$

converge et déterminer sa valeur.

7.10 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

diverge.

7.11 En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge et déterminer sa valeur.

7.12 Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \geqslant 1, \qquad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

7.13

1. À l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{\mathrm{A}} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ puis calculer :

$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

2. Que peut-on en déduire pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$?

7.14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer, pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale

$$\mathrm{I_A} = \int_1^{\mathrm{A}} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer $\lim\limits_{A\to+\infty} I_A$.

3. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et déterminer sa valeur.

7.15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

En séparant les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$, calculer l'expression

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

7.16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de la fonction m définie pour tout réel x positif ou nul par :

$$m(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2. Soit M un réel strictement positif. On pose :

$$I(M) = \int_0^M xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Déduire de la question précédente la valeur de $I(M)$.
Calculer $\lim\limits_{M\to+\infty} I(M)$.

3. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et déterminer sa valeur.

7.17 **d'après ECRICOME 2016**

On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$.

1. Montrer que I_0 est une intégrale convergente, égale à $\dfrac{1}{e}$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout réel $M > 1$:

$$\int_1^M x^{n+1}e^{-x}\,dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x}\,dx$$

3. En raisonnant par récurrence à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.

4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

5. Calculer I_n pour $n \in \{1;2;3\}$.

4. Corrigé des exercices

7.1

1. Une primitive de f_1 est donnée par :

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 7x$$

2. Une primitive de f_2 est donnée par :

$$F_2(x) = -3\ln(x)$$

3. On a $f_3(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2} = \dfrac{x^4}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Donc, une primitive de f_3 est donnée par :

$$F_3(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}$$

4. Une primitive de f_4 est donnée par :

$$F_4(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

5. La fonction f_5 semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = 7x+1$ et $n = 8$. On a $u'(x) = 7$ donc

$$u'(x)u(x)^n = 7 \times (7x+1)^8 = 7f_5(x)$$

Une primitive de f_5 est donc donnée par :

$$F_5(x) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{8+1}(5x+1)^{7+1} = \frac{(7x+1)^9}{63}$$

6. La fonction f_6 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ avec $u(x) = x^2+x+1$ et $n = 4$. On a $u'(x) = 2x+1$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^n} = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4} = f_6(x)$$

Une primitive de f_6 est donc donnée par :

$$F_6(x) = \frac{-1}{(4-1)(x^2+x+1)^{4-1}} = \frac{-1}{3(x^2+x+1)^3}$$

7. La fonction f_7 semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $n = 2$. On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc :

$$u'(x)u(x)^n = \frac{1}{x}(\ln(x))^2 = f_7(x)$$

Une primitive de f_7 est donc donnée par :

$$F_7(x) = \frac{(\ln(x))^3}{3}$$

8. La fonction f_8 semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^3 + 1$. On a $u'(x) = 3x^2$ donc :

$$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{3}{2} f_8(x)$$

Une primitive de f_8 est donc donnée par :

$$F_8(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}$$

7.2

1. Calculons le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$. On a alors :

$$\alpha = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{2+4}{2} = 3$$

2. On cherche donc a et b tels que :

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$$

On a :

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} &\iff \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{a(x-3)}{x^2-2x-3} + \frac{b(x+1)}{x^2-2x-3} \\
&\iff \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{ax-3a+bx+b}{x^2-2x-3} \\
&\iff \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{(a+b)x+b-3a}{x^2-2x-3} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ -3a+b & = & 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -b \\ -4a & = & 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} b & = & \frac{1}{4} \\ a & = & -\frac{1}{4} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-3)}$$

3. Ainsi, une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = -\frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-3|$$

7.3

1. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(x) = x^3 + x - 2$. Une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + \frac{1}{1+1}x^{1+1} - 2 \times x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_{-2}^{3} (x^3 + x - 2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^{3} &= \left(\frac{1}{4}(3)^4 + \frac{1}{2}(3)^2 - 2\times 3\right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\times(-2)\right)\\
&= \frac{81}{4} + \frac{9}{2} - 6 - 4 - 2 - 4\\
&= \frac{81 + 18 - 64}{4}\\
&= \frac{35}{4}
\end{aligned}$$

2. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \sqrt{2x+3}$. La fonction f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 2x+3$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. Ainsi $u'(x) = 2$ et on a alors :

$$u'u^\alpha = 2(2x+3)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2x+3} = 2f(x).$$

On a $f(x) = \frac{1}{2}u'u^\alpha$, une primitive de f est donc donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+3)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}}(2x+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I_2 = \int_{3}^{11} \sqrt{2x+2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_3^{11} &= \left(\frac{1}{3}(2\times 11+3)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}(2\times 3+3)^{\frac{3}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{3}(25)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(9)^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{1}{3}((25)^{\frac{1}{2}})^3 - \frac{1}{3}((9)^{\frac{1}{2}})^3\\
&= \frac{1}{3}(\sqrt{25})^3 - \frac{1}{3}(\sqrt{9})^3\\
&= \frac{125}{3} - \frac{27}{3}\\
&= \frac{98}{3}
\end{aligned}$$

3. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}$. La fonction f semble être de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^5 + 3$. Ainsi $u'(t) = 5t^4$ et on a alors :

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{5t^4}{2\sqrt{t^5+3}} = \frac{5}{2}\frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} = \frac{5}{2}f(t)$$

Ainsi $f(t) = \frac{2}{5} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et une primitive de f est donnée par :

$$\mathrm{F}(t) = \frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_3 = \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{1^5+3} - \frac{2}{5}\sqrt{0^5+3} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{4} - \frac{2}{5}\sqrt{3} \\
&= \frac{4-2\sqrt{3}}{5}
\end{aligned}$$

7.4

1. On effectue une intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) &=& t \\ v'(t) &=& e^{2t} \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) &=& 1 \\ v(t) &=& \frac{1}{2}e^{2t} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_6 &= \left[\frac{t}{2}e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2. On effectue une intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) &=& \ln(t) \\ v'(t) &=& t \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) &=& \frac{1}{t} \\ v(t) &=& \frac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_7 &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t} \times \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\ln(2) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} \\
&= 2\ln(2) - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

3. On effectue une intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) & = & x^2+1 \\ v'(x) & = & e^{3x} \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{lcl} u'(x) & = & 2x \\ v(x) & = & \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_8 &= \left[\frac{x^2+1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{3}e^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Puis, pour calculer $\int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x$, on effectue une seconde intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & e^{3x} \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{lcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}e^3 - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} I_8 &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) \\ &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{27}e^3 - \frac{2}{27} \\ &= \frac{14}{27}e^3 - \frac{11}{27} \end{aligned}$$

4. On effectue une intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{lcl} u(t) & = & \ln(1+t) \\ v'(t) & = & \frac{1}{t^2} \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{lcl} u'(t) & = & \frac{1}{1+t} \\ v(t) & = & \frac{-1}{t} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_9 &= \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \int_1^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \left[\ln(t) - \ln(1+t)\right]_1^2 \\ &= -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + ln(2) - \ln(3) + \ln(2) \\ &= -\frac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2) \end{aligned}$$

7.5

1. **a.** La fonction f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = x + \sqrt{x^2+2}$. On a d'une part :

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}$$

et donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = u'(x) \times \frac{1}{u(x)}$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$

b. D'après ce qui précède :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)]_0^1$$

donc

$$\mathrm{I} = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$$

2. **a.** Par linéarité de l'intégrale, on a successivement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} + 2\mathrm{I} &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+2}\times\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{K}
\end{aligned}$$

b. $\mathrm{K} = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 \times \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x.$

Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x^2+2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \end{cases}$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{3} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{3} - \mathrm{J}
\end{aligned}$$

c. Les réels J et K vérifient donc le système :

$$\begin{cases} K - J = 2I \\ K + J = \sqrt{3} \end{cases}$$

$L_1 + L_2$ donne $2K = 2I + \sqrt{3}$.
$L_2 - L_1$ donne $2J = \sqrt{3} - 2I$.
Sachant que $I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$, on a donc :

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$$

et

$$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{2})$$

7.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^n \, dx$.

1. La fonction $x \mapsto (\ln(x))^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier sur $[1;e]$ donc l'intégrale I_n existe.
2. $I_0 = \displaystyle\int_1^e 1 \, dx = [x]_1^e = e - 1$ et $I_1 = \displaystyle\int_1^e \ln(x) \, dx$.
Pour calculer I_1, on fait une intégration par parties (cf exemple du cours).
D'où :
$$I_1 = [x\ln(x) - x]_1^e = e - e - (-1) = 1$$
3. Soit n dans $\mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^e (\ln(x))^{n+1} \, dx - \int_1^e (\ln(x))^n \, dx \\ &= \int_1^e \left((\ln(x))^{n+1} - (\ln(x))^n\right) dx \\ &= \int_1^e (\ln(x))^n (\ln(x) - 1) \, dx \end{aligned}$$
Or, $x \in [1;e]$ donc $x \geqslant 1$ donc $\ln(x) \geqslant 0$ et $(\ln(x))^n \geqslant 0$. De plus, $x \leqslant e$ donc $\ln(x) \leqslant \ln(e)$ donc $\ln(x) - 1 \leqslant 0$ et finalement $(\ln(x))^n (\ln(x) - 1) \leqslant 0$ avec $1 \leqslant e$ donc par positivité de l'intégrale, on obtient :
$$\int_1^e (\ln(x))^n (\ln(x) - 1) \, dx \leqslant 0$$
i.e. $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (I_n) est décroissante. D'autre part, on a montré que pour tout $x \in [1;e]$, on a $(\ln(x))^n \geqslant 0$ avec $1 \leqslant e$ donc par positivité de l'intégrale, on obtient :
$$\int_1^e (\ln(x))^n \, dx \geqslant 0$$
i.e. $I_n \geqslant 0$. Ainsi, la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. Soit ℓ sa limite.

4. Pour montrer cette relation, nous allons effectuer une intégration par parties sur l'intégrale I_{n+1}.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln(x))^{n+1} \end{cases}$

alors $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^n \end{cases}$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)\,v(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x(\ln(x))^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - 0 - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)\mathrm{I}_n$.

5. Soit n dans $\mathbb{N}$. On sait que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{I}_m \geqslant 0$ donc en particulier $\mathrm{I}_{n+1} \geqslant 0$ et donc d'après la question précédente, $\mathrm{e} - (n+1)\mathrm{I}_n \geqslant 0$ ce qui s'écrit

$$(n+1)\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{e}.$$

En divisant par $n+1 > 0$, on obtient

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \tfrac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$ donc le théorème d'encadrement s'applique et permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$ *i.e.* $\ell = 0$.

7.7

1. Tout d'abord, on a clairement, pour tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n}$$

Par ailleurs, puisque $x \geqslant 0$, on a $1 + x^n \geqslant 1$. Et donc,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$$

Bref, pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$$

Et donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

Or,

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc,

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$$

2. On a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x^n-x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{I}_n$$

Or, on vient de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1$$

3. a. On a :

$$\mathrm{J}_n = n\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

On fait une intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{rcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & \dfrac{nx^{n-1}}{1+x^n} \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & 1 \\ vxt) & = & \ln(1+x^n) \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_n &= \Big[x\ln(1+x^n)\Big]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

b. Posons $f(t) = \ln(1+t) - t$ pour tout $t \geqslant 0$. On a, pour tout $t \geqslant 0$:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t} \leqslant 0$$

Donc, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$f(t) \leqslant f(0) = 0$$

Autrement dit, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\ln(1+t) \leqslant t$$

Par ailleurs, puisque $t \geqslant 0$, on a $1+t \geqslant 1$, donc $\ln(1+t) \geqslant 0$. Bref, on a bien :

$$0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$$

c. D'après la question précédente, on a pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$$

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$$

Et donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = \ln(2)$$

7.8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. a. $\mathrm{J}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$.

b. Soit x dans $[0;1]$. On a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0^2 \leqslant x^2 \leqslant 1^2 \iff 1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2 \iff 1 \geqslant \frac{1}{1+x^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Or $\frac{1}{2} \geqslant 0$, alors $0 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ donc en multipliant par $x^n \geqslant 0$, on obtient $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ et puisque $0 \leqslant 1$, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi :

$$0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

c. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement s'applique et on peut conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 0$.

2. a. Intégrons par parties l'intégrale I_n. Posons $\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = \ln(1+x^2) \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\times\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}\mathrm{J}_{n+2}
\end{aligned}$$

b. D'après la question **1.(b)** on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_{n+2} = 0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}\mathrm{J}_{n+2} = 0$. Enfin, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{n+1} = 0$ d'où facilement $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n = 0$.

7.9 Soit $\mathrm{M}\in[0;+\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\mathrm{M}} \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^3}$. Remarquons que :

$$\frac{t}{(1+t^2)^3} = t(1+t^2)^{-3}.$$

La fonction f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $\alpha = -3$ et $u(t) = 1+t^2$. On a $u'(t) = 2t$. Ainsi

$$u'u^\alpha = 2t(1+t^2)^{-3} = 2f(t).$$

Une primitive de f est donc donnée par :

$$\mathrm{F}(t) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{-2}(1+t^2)^{-2} = -\frac{1}{4(1+t^2)^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mathrm{M}} \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{4(1+t^2)^2}\right]_0^{\mathrm{M}} \\
&= -\frac{1}{4(1+\mathrm{M}^2)^2} + \frac{1}{4(1+0)^2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+\mathrm{M}^2)^2}.
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{\mathrm{M}\to+\infty} -\frac{1}{4(1+\mathrm{M}^2)^2} = 0$ donc

$$\lim_{\mathrm{M}\to+\infty}\frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+\mathrm{M}^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}.$$

7.10 Soit $M \in [1;+\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale
$$\int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$
Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Remarquons que :
$$\frac{ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x).$$
Ainsi f semble Ãłtre de la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln(x)$. Or $u'(x) = \frac{1}{x}$. On a donc :
$$u'u = \frac{1}{x}\ln(x) = f(x).$$
Ainsi une primitive de f est donnée par :
$$F(x) = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,dx &= \left[\frac{1}{2}\ln(x)^2\right]_1^M\\ &= \frac{1}{2}\ln(M)^2 - \frac{1}{2}\ln(1)^2\\ &= \frac{1}{2}\ln(M)^2.\end{aligned}$$
Or $\lim_{M\to+\infty} \ln(M)^2 = +\infty$ donc $\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,dx = +\infty$ ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ diverge.

7.11 Soit $M \in [0;+\infty[$, calculons l'intégrale $\int_0^M x^3e^{-x^2}\,dx$. Pour cela, effectuons une intégration par parties. Commençons par remarquer que :
$$x^3e^{-x^2} = x^2 \times xe^{-x^2}$$
Posons $\begin{cases} u'(x) = xe^{-x^2} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.

Par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_0^M x^3e^{-x^2}\,dx &= \int_0^M u'(x)v(x)\,dx\\ &= [u(x)v(x)]_0^M - \int_0^M u(x)v'(x)\,dx\\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}x^2\right]_0^M - \int_0^M -\frac{1}{2}e^{-x^2} \times 2x\,dx\\ &= -\frac{1}{2}M^2e^{-M^2} + \int_0^M xe^{-x^2}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}M^2e^{-M^2} + \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^M\\ &= -\frac{1}{2}M^2e^{-M^2} - \frac{1}{2}e^{-M^2} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} e^{-M^2} = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{M\to+\infty} M^2e^{-M^2} = 0$ donc

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2}M^2e^{-M^2} - \frac{1}{2}e^{-M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$

7.12 Commençons par chercher trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \geqslant 1, \qquad \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En mettant le membre de droite au même dénominateur, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} &= \frac{a(1+x)^2 + bx(1+x) + cx}{x(1+x)^2}\\ &= \frac{a + 2ax + ax^2 + bx + bx^2 + cx}{x(1+x)^2}\\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(1+x)^2}\end{aligned}$$

On procède alors par identification pour obtenir l'égalité, il faut

$$a = 1, \quad 2a+b+c = 0, \quad a+b = 0.$$

Ainsi on a :

$$a = 1, \quad b = -a = -1, \quad c = -2a-b = -2+1 = -1.$$

Ainsi

$$\forall x \geqslant 1, \qquad \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{1+x} + \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

Soit $M \in [1;+\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale $\int_1^M \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx$. Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}$. D'après ce qui précède, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Il nous faut donc calculer une primitive des trois termes composant f.

1. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donnée par $x \mapsto \ln(x)$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+x$. Ainsi une primitive est donnée par $x \mapsto \ln|1+x|$.
   Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{1+x}$ est donc donnée par $x \mapsto -\ln|1+x|$.
3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 1+x$ et $\alpha = -2$. Ainsi une primitive est donnée par $x \mapsto \frac{1}{-2+1}(1+x)^{-2+1} = -\frac{1}{1+x}$.
   Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ est donc donnée par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Ainsi une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = \ln(x) - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x}.$$

Nous pouvons alors calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_1^M \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx &= \left[\ln(x) - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x}\right]_1^M \\
&= \ln(M) - \ln|1+M| + \frac{1}{1+M} - \ln(1) + \ln|1+1| - \frac{1}{1+1} \\
&= \ln(M) - \ln(1+M) + \frac{1}{1+M} + \ln(2) - 1 \\
&= \ln\left(\frac{M}{1+M}\right) + \frac{1}{1+M} + \ln(2) - 1
\end{aligned}$$

Il nous reste alors à calculer la limite du terme $\ln\left(\frac{M}{1+M}\right) + \frac{1}{1+M} + \ln(2) - 1$. A priori, la limite du terme $\ln\left(\frac{M}{1+M}\right)$ est une forme indéterminée. Factorisons :

$$\ln\left(\frac{M}{1+M}\right) = \ln\left(\frac{M}{M\left(\frac{1}{M}+1\right)}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{M}+1}\right).$$

On en déduit donc par composée de limites que $\lim\limits_{M\to+\infty} \ln\left(\frac{M}{1+M}\right) = \ln(1) = 0$. Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{1}{1+M} = 0$, ainsi

$$\lim_{M\to+\infty} \ln\left(\frac{M}{1+M}\right) + \frac{1}{1+M} + \ln(2) - 1 = \ln(2) - 1.$$

On en déduit donc que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx$ converge et que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\,dx = \ln(2) - 1.$$

7.13

1. Soit $A \geqslant 0$, calculons l'intégrale $\int_0^A xe^{-x}\,dx$.

Effectuons une intégration par parties. Posons $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^A xe^{-x}\,dx &= \int_0^A u'(x)v(x)\,dx \\
&= [u(x)v(x)]_0^A - \int_0^A u(x)v'(x)\,dx \\
&= \left[-xe^{-x}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-x} \times 1\,dx \\
&= -Ae^{-A} + \int_0^A e^{-x}\,dx \\
&= -Ae^{-A} + \left[-e^{-x}\right]_0^A \\
&= -Ae^{-A} + (-e^{-A} - (-e^{-0})) \\
&= -Ae^{-A} - e^{-A} + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\int_0^{\mathrm{A}} xe^{-x}\,dx = 1 - \mathrm{A}e^{-\mathrm{A}} - e^{-\mathrm{A}}.$$
Or $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty} e^{-\mathrm{A}} = 0$ et par croissance comparée $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty} \mathrm{A}e^{-\mathrm{A}} = 0$, donc :
$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_0^{\mathrm{A}} xe^{-x}\,dx = 1.$$

2. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ converge et que :
$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1.$$

7.14

1. Soit $\mathrm{A} \geqslant 1$, calculons $\mathrm{I_A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{A}} \frac{2}{x^3}\,dx$. Pour cela posons, $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$. On a :
$$f(x) = 2x^{\alpha} \quad \text{avec } \alpha = -3.$$
Ainsi une primitive de f est donnée par :
$$\mathrm{F}(x) = 2\times\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} = \frac{2}{-2}x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$
On a alors :
$$\mathrm{I_A} = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^{\mathrm{A}} = -\frac{1}{\mathrm{A}^2} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{\mathrm{A}^2}.$$

2. On a $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{A}^2} = 0$ donc
$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \mathrm{I_A} = 1.$$

3. En utilisant la relation de Chasles et l'expression de la fonction f, on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}\,dx.$$
Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ revient donc à étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}\,dx$.
Cela a été fait dans les questions précédentes, on a montré que :
$$\lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_1^{\mathrm{A}}\frac{2}{x^3}\,dx = 1.$$
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^3}\,dx$ converge et vaut 1. On peut donc conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

7.15 Soit $x < 0$, calculons $F(x)$. On a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)t.$$

Comme $x < 0$, la variable d'intégration $t \in]-\infty; x[$, on a $t < 0$ et donc $f(t) = 0$. Ainsi pour $x < 0$, $F(x) = 0$.
Soit $x \geqslant 0$, calculons $F(x)$. On a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)t.$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)t + \int_{0}^{x} f(t)t.$$

Or pour $t \in]-\infty; 0[$, $f(t) = 0$ et pour $t \in [0; x]$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$, on a donc :

$$F(x) = 0 + \int_{0}^{x} e^{-t}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -\mathrm{e}^{-x} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

7.16

1. On a, pour tout $x \geqslant 0$,
$$m'(x) = \frac{-2x}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$
2. D'après la question précédente, une primitive de $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ est donnée par :
$$F(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$
On a donc,
$$I(M) = \int_0^M xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^M = 1 - e^{-\frac{M^2}{2}}$$
On a par ailleurs,
$$\lim_{M\to+\infty} e^{-\frac{M^2}{2}} = 0$$
donc,
$$\lim_{M\to+\infty} I(M) = 1$$
3. En utilisant la relation de Chasles et l'expression de la fonction f, on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$
Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ revient donc à étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.
Cela a été fait dans les questions précédentes, on a montré que :
$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1.$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. On peut donc conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

7.17

1. Soit $\mathrm{M} \geqslant 1$. Calculons $\displaystyle\int_1^{\mathrm{M}} e^{-x}\,\mathrm{d}x$:

$$\int_1^{\mathrm{M}} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-x}\Big]_1^{\mathrm{M}} = -e^{-\mathrm{M}} - (-e^{-1}) = \frac{1}{e} - e^{-\mathrm{M}}$$

$\displaystyle\lim_{\mathrm{M}\to+\infty} -\mathrm{M} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\mathrm{X}\to-\infty} e^{\mathrm{X}} = 0$ donc par composition $\displaystyle\lim_{\mathrm{M}\to+\infty} e^{-\mathrm{M}} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{M}\to+\infty}\left(\frac{1}{e} - e^{-\mathrm{M}}\right) = \frac{1}{e}$ *i.e* $\displaystyle\lim_{\mathrm{M}\to+\infty}\int_1^{\mathrm{M}} e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{e}$, ce qui prouve que $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente égale à $\dfrac{1}{e}$.

2. Soit $\mathrm{M} \geqslant 1$. Posons

$$\begin{cases} u'(x) &= e^{-x} \\ v(x) &= x^{n+1} \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \begin{cases} u(x) &= -e^{-x} \\ v(x) &= (n+1)x^n \end{cases}$$

Par intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{M}} x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{M}} u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[u(x)\,v(x)\Big]_1^{\mathrm{M}} - \int_1^{\mathrm{M}} u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-x^{n+1}e^{-x}\Big]_1^{\mathrm{M}} - \int_1^{\mathrm{M}} -e^{-x}(n+1)x^n\,\mathrm{d}x \\
&= -\mathrm{M}^{n+1}e^{-\mathrm{M}} - (-e^{-1}) + \int_1^{\mathrm{M}} e^{-x}(n+1)x^n\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mathrm{M}^{n+1}}{e^{\mathrm{M}}} + \frac{1}{e} + \int_1^{\mathrm{M}} (n+1)x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

D'où le résultat souhaité.
Par linéarité de l'intégrale, nous obtenons finalement l'égalité :

$$\int_1^{\mathrm{M}} x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{M}^{n+1}}{e^{\mathrm{M}}} + \frac{1}{e} + (n+1)\int_1^{\mathrm{M}} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

3. Notons $\mathscr{P}_n$ la proposition : « l'intégrale I_n converge ».
Initialisation ($n = 0$) :
D'après la question **1.(a)**, l'intégrale I_0 converge donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que I_n converge, ce qui signifie que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{M}} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie (égale à I_n) quand M tend vers $+\infty$. Par

conséquent, l'expression $(n+1)\int_1^{\mathrm{M}} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie (égale à $(n+1)\mathrm{I}_n$) quand M tend vers $+\infty$. De plus, par croissances comparées, $\lim_{\mathrm{M}\to+\infty} \frac{\mathrm{M}^{n+1}}{e^{\mathrm{M}}} = 0$ donc l'expression $-\frac{\mathrm{M}^{n+1}}{e^{\mathrm{M}}} + \frac{1}{e} + \int_1^{\mathrm{M}} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie (égale à $\frac{1}{e} + (n+1)\mathrm{I}_n$) quand M tend vers $+\infty$. Or, d'après la question **1.(b)**, cette expression est égale à $\int_1^{\mathrm{M}} x^{n+1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Ainsi, on vient de justifier que $\int_1^{\mathrm{M}} x^{n+1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie égale à $\frac{1}{e}+(n+1)\mathrm{I}_n$ quand M tend vers $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale I_{n+1} converge et vaut $\frac{1}{e} + (n+1)\mathrm{I}_n$ donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \qquad \text{l'intégrale } \mathrm{I}_n \text{ converge .}$$

4. Question traitée à l'intérieur de l'hérédité de la récurrence de la question précédente : pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)\mathrm{I}_n$$

5. On sait que $\mathrm{I}_0 = \frac{1}{e}$ d'après la question **1.(a)**.
La formule obtenue en **1.(d)** pour $n = 0$ donne $\mathrm{I}_1 = \frac{1}{e} + \mathrm{I}_0$ donc $\mathrm{I}_1 = \frac{2}{e}$.
La formule obtenue en **1.(d)** pour $n = 1$ donne $\mathrm{I}_2 = \frac{1}{e} + 2\mathrm{I}_1$ donc $\mathrm{I}_2 = \frac{5}{e}$.
La formule obtenue en **1.(d)** pour $n = 2$ donne $\mathrm{I}_3 = \frac{1}{e} + 3\mathrm{I}_2$ donc $\mathrm{I}_3 = \frac{16}{e}$.

---

5. TABLE DES MATIÈRES