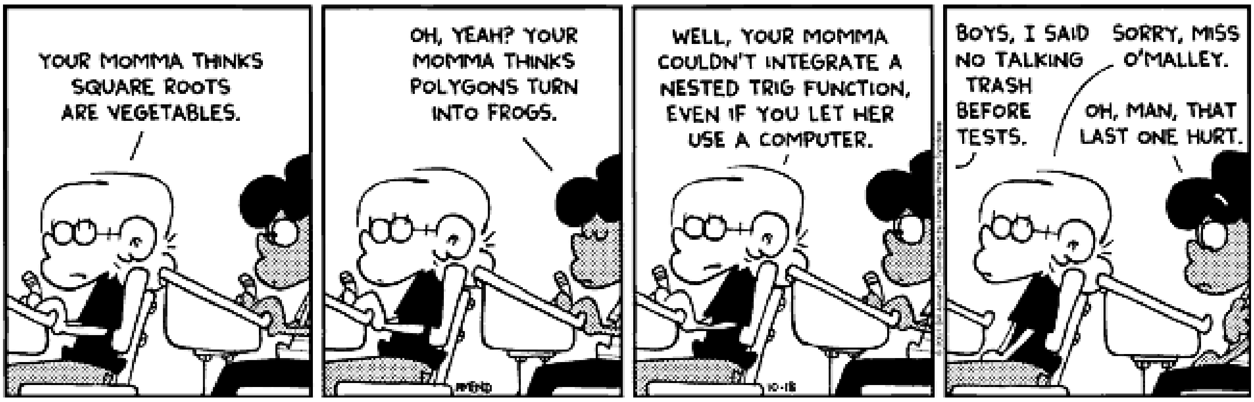
Cours de mathématiques
ECT 2ème année

Chapitre 4
Variables aléatoires discrètes



Adrien Fontaine
Année scolaire 2020–2021

1. Généralités sur les variables aléatoires

1.1. Espace probabilisé

Étant donné une expérience aléatoire, pour calculer des probabilités :

- On commence par déterminer l'univers Ω de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire. Cet ensemble peut être **fini** ou **infini** :
  - Si l'expérience consiste à lancer un dé à 6 faces et à observer le numéro obtenu, alors $\Omega = [\![1;6]\!]$;
  - Si l'expérience consiste à lancer une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier pile, alors $\Omega = \mathbb{N}^*$;
  - Si l'expérience consiste à observer a durée de vie d'une ampoule (en minutes), alors $\Omega = \mathbb{R}_+$ (par exemple) ;
  - etc
- On déterminer ensuite une probabilité sur Ω, c'est-à-dire une application $\mathbb{P}$ qui à un sous-ensemble de Ω (*i.e* un évènement) associe un réel (compris entre 0 et 1) qui mesure le « degré de vraissemblance » de cet évènement.

Commençons par rappeler quelques propriétés, vues en première année dans le cas d'un univers fini, et qui restent vraies dans le cas d'un univers infini.

Proposition 1 :

Soient A et B deux évènements. On a les résultats suivant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- Si A et B sont incompatibles (*i.e* $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exemple : Tout au long de ce chapitre, on s'appuiera sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1 €. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4 €, si on a un numéro pair on reçoit 2 € et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$.
2. On lance un dé équilibré et on note X le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir 6. X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (il faut au moins un lancer pour obtenir 6).

1.2. Évènements associés à une variable aléatoire

Définition 1 :

Soit X une variable aléatoire et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$
\begin{aligned}
[X = x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \\
[X < x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} \\
[X \leqslant x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant x\} \\
[X > x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) > x\} \\
[X \geqslant x] &= \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant x\}
\end{aligned}
$$

Si x et y sont deux réels tels que $x < y$ alors on note

$$\left[x \leqslant X \leqslant y\right] = \{\omega \in \Omega ; x \leqslant X(\omega) \leqslant y\}$$

Plus généralement, si I désigne une partie de $\mathbb{R}$, on note :

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in I\}.$$

Exemple : Calculer $\mathbb{P}([X = 1])$ et $P([X \leqslant 2])$ dans les deux exemples de la partie **1.1**.

1. On a $X = 1$ si et seulement si on a obtenu un numéro pair, *i.e* un 2 ou un 4. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}$$

On a $X \leqslant 2$ si et seulement si $X = -1$ ou $X = 1$ si et seulement si on obtient 2, 3, 4 ou 5. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

2. On a une chance sur 6 d'obtenir un 6 au premier lancer donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}$$

On a $X \leqslant 2$ si et seulement si $X = 1$ ou $X = 2$. On a déjà calculé la probabilité $\mathbb{P}(X = 1)$. L'évènement $X = 2$ correspond au cas ou l'on obtient un nombre différent de 6 au premier lancer et un 6 au deuxième lancer. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

Et donc,

$$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$$

Proposition 2 :

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\{[X = x] ; x \in X(\Omega)\}$$

forme un système complet d'évènements. En particulier, on a :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1.$$

Remarque :

- Lorsque $X(\Omega)$ est fini, la somme précédente est une somme finie. En effet, dans ce cas,
$$X(\Omega) = \{x_1\,;\, x_2\,;\, \cdots\,;\, x_n\}\,,$$
et donc
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = x_k]) = 1\,.$$
- Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable, la somme précédente est la somme d'une série convergente. En effet, dans ce cas,
$$X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}\,,$$
et donc
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = x_k]) = 1\,.$$
- Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $\mathbb{P}([X = x])$ en $\mathbb{P}(X = x)$, et de même pour les autres ensembles.

Exemple : On reprend les deux exemples de la partie **1.1**.

1. $\{[X = -1]\,;\, [X = 1]\,;\, [X = 3]\}$ forme un système complet d'évènements.
2. $\left\{[X = k]\,;\, k \in \mathbb{N}^*\right\}$ forme un système complet d'évènements.

2. Variables aléatoires discrètes

2.1. Définition

Définition 2 :

Soit X une variable aléatoire. On dit que :

- X est une **variable aléatoire discrète** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.
- X est une **variable aléatoire discrète finie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble fini.
- X est une **variable aléatoire discrète infinie** si son support $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Exemple : On reprend les deux exemples de la partie **1.1**.

1. On a vu que $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$. Ainsi, X est une variable aléatoire discrète finie.
2. On a vu que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ainsi, X est une variable aléatoire discrète infinie.

2.2. Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 3 :

Soit X une variable aléatoire. On appelle **loi** de la variable aléatoire X, la donnée des $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout réel x.

Méthode 1 : Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

- On donne l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.
- On calcule $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec, sur la 1ère ligne, les valeurs prises par X, et sur la 2ème ligne les probabilité correspondantes.

Exemple : On reprend les deux exemples de la partie **1.1**.

1. La loi de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{2}{5}, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}, \qquad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{5}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

x	-1	1	3	Total
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

2. La loi de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}.$$

On peut vérifier au passage que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

2.3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

Définition 4 :

Soit X une variable aléatoire. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X, et on note F_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rccl} F_X : & \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ & x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array}$$

Proposition 3 :

Soit X une variable aléatoire discrète. On note $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \cdots\}$ avec $x_1 < x_2 < \cdots$. Alors :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1 \\ \mathbb{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbb{P}(X = x_k) & \text{si} \quad x_k \leqslant x < x_{k+1} \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant \max_{i \in \mathbb{N}} x_i \end{cases}.$$

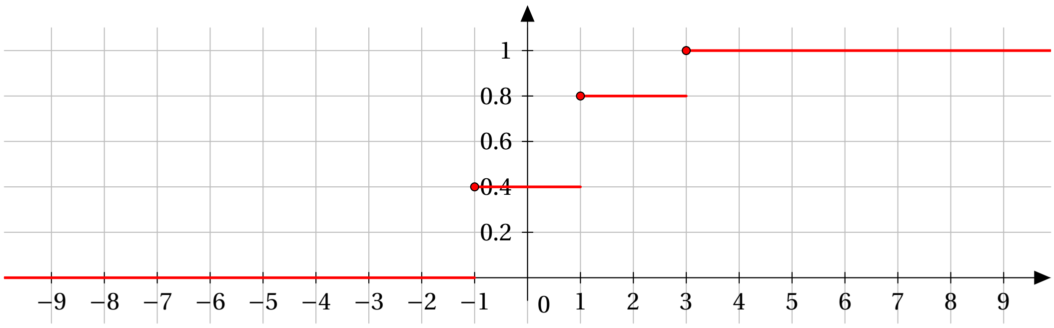
En particulier, F_X est constante sur $[x_k ; x_{k+1}[$.

Exemple : On reprend les deux exemples de la partie **1.1**.

1. On a vu que $X(\Omega) = \{-1;1;3\}$. Dès lors,
- Si $x < -1$, alors $F_X(x) = 0$.
- Si $-1 \leqslant x < 1$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(X = -1) = \dfrac{2}{5}$.
- Si $1 \leqslant x < 3$, alors $F_X(x) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{5}$.
- Si $x \geqslant 3$, alors $F_X(x) = 1$.

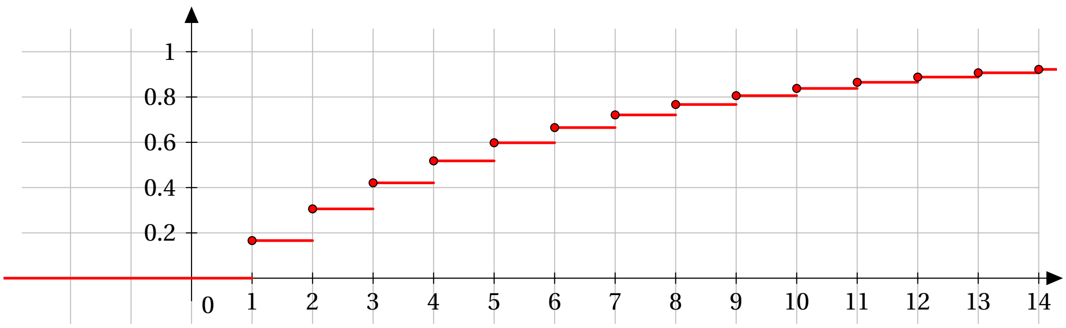
Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{2}{5} & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ \frac{4}{5} & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \end{cases}.$$



2. On a vu que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Dès lors,
- Si $x < 1$, alors $F_X(x) = 0$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $k \leqslant x < k+1$, alors :

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \times \frac{1}{6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{k}.$$



Proposition 4 :

Soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z}$. Alors :

$$\forall k \in X(\Omega), \qquad \mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Remarque : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine parfaitement la loi de X. Autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles suivent la même loi.

3. Moments d'une variable aléatoire discrète

3.1. Espérance

Définition 5 :

Soit X une variable aléatoire discrète.

- Si X est une variable aléatoire discrète finie, avec $X(\Omega) = \{x_1;\cdots;x_n\}$, alors X admet une **espérance**, notée $\mathbb{E}(X)$, définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

- Si X est une variable aléatoire discrète infinie, avec $X(\Omega)\{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$, et si la série de terme général $x_n\mathbb{P}(x_n)$ est **absolument** convergente, alors on dit que X admet une **espérance**, notée $\mathbb{E}(X)$, et définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

Remarque : L'espérance s'interprête comme une moyenne.

Exemple : Montrer que la variable aléatoire X, du premier exemple de la partie **1.1**, admet une espérance et la calculer.
En reprenant le tableau de la loi de X, on peut facilement calculer :

$$\mathbb{E}(X) = (-1)\times\frac{2}{5} + 1\times\frac{2}{5} + 3\times\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Remarque : On peut montrer (*hors programme ECT*) que la série $\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6} = 6$$

Autrement dit, la variable aléatoire X du deuxième exemple de la partie **1.1** admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 6$.

Proposition 5 : Linéarité

Soient X et Y deux variables aléatoires discrète admettant une espérance. Soit a et $b \in \mathbb{R}$. Alors, $X+Y$ et $aX+b$ admettent une espérance et :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b.$$

Exemple : On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x+3$ et $Y = g(X) = 2X+3$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
Alors $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et le dé étant non truqué, on est en situation d'équiprobabilité : $\forall k \in [\![1;6]\!],\quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}$.
$X(\Omega)$ est fini, donc X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}.$$

$Y = 2X+3$ est aussi une variable finie, elle admet un espérance et

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2X+3) = 2\mathbb{E}(X)+3 = 7+3 = 10\,.$$

Théorème 1 : de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète. On note $X(\Omega) = \{x_i\,;\, i \in I\}$ avec $I \subseteq \mathbb{N}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance, si et seulement si, la série de terme général $g(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente. Dans ce cas, on a alors :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i\in I} g(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)\,.$$

Remarque :

- Si X est une variable aléatoire discrète finie, alors I est finie, donc l'espérance de $g(X)$ existe et la somme intervenant dans sa définition est une somme finie.
- Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.

Exemple : On considère la variable X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	-3	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$2/10$	$1/10$	$1/10$	$2/10$	$3/10$	$1/10$

Calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(X^3)$.

On a :

$$\mathbb{E}(X^2) = (-3)^2\times\frac{2}{10} + (-1)^2\times\frac{1}{10} + 0^2\times\frac{1}{10} + 1^2\times\frac{2}{10} + 2^2\times\frac{3}{10} + 3^2\times\frac{1}{10} = \frac{42}{10} = \frac{21}{5}$$

Et

$$\mathbb{E}(X^3) = (-3)^3\times\frac{2}{10} + (-1)^3\times\frac{1}{10} + 0^3\times\frac{1}{10} + 1^3\times\frac{2}{10} + 2^3\times\frac{3}{10} + 3^3\times\frac{1}{10} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$$

3.2. Variance

Définition 6 :

Soit X une variable aléatoire discrète.

- Si X est une variable aléatoire discrète finie avec $X(\Omega) = \{x_1\,;\, x_2\,;\cdots;\, x_n\}$, alors X admet une **variance**, notée $\mathbb{V}(X)$, et définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X = x_i)\,.$$

- Si X est une variable aléatoire discrète infinie, avec $X(\Omega) = \{x_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$ et si la série de terme général $(x_n - \mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X = x_n)$ est **absolument** convergente, alors on dit que X admet une **variance**, notée $\mathbb{V}(X)$ et définie par :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k - \mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X = x_k)\,.$$

Remarque :

- La série $\sum_{n\geqslant 0}(x_n-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x_n)$ étant à termes positifs, elle est absolument convergente, si et seulement si, elle est convergente.
- Sous réserve d'existence, on a $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(X-\mathbb{E}(X))^2\right)$.
- La variance, si elle existe, est un réel **positif ou nul**.
- La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Théorème 2 : Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète. X admet une variance, si et seulement si, $\mathbb{E}(X^2)$ existe, et dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2\,.$$

Méthode 2 : Répondre à la question « X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer. »

- Si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
- Si X admet une espérance, il faut regarder si $\mathbb{E}(X^2)$ existe (grâce au théorème de transfert).
  - Si non, alors X n'admet pas de variance.
  - Si oui, alors on utilise la formule de König-Huygens
    $$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2\,,$$
    pour la calculer.

Exemple : Montrer que la variable aléatoire X, du premier exemple de la partie **1.1**, admet une variance et la calculer.

On a déjà vu que $\mathbb{E}(X)=\frac{3}{5}$. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{2}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{13}{5}$$

Dès lors, d'après la formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{13}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{65}{25}-\frac{9}{25}=\frac{56}{25}$$

Remarque : On peut montrer (*hors programme ECT*) que la série $\sum_{n\geqslant 1}n^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}=66$$

Autrement dit, la variable aléatoire X du deuxième exemple de la partie **1.1** admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(X^2)=$. Dès lors, X admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=66-36=30$$

Proposition 6 :

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe et soient a et b dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)\,.$$

En particulier,

$$\mathbb{V}(X+b)=\mathbb{V}(X)\,.$$

Remarque : Contrairement à l'espérance, la variance n'est pas linéaire.

Exemple : On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$. Calculer la variance de X puis celle de Y.
X suit une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$ donc, on sait que

$$\mathbb{V}(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$$

Dès lors,

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(2X+3) = 2^2\mathbb{V}(X) = 4\times\frac{35}{12} = \frac{35}{3}$$

Définition 7 :

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. On appelle **écart-type** de X, et on note $\sigma(X)$ le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

4. Lois discrètes usuelles

4.1. Lois discrètes finies

4.1.1 Loi uniforme

Définition 8 :

Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ avec $a<b$. Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![a;b]\!]$ lorsque $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et que :

$$\forall k\in[\![a;b]\!], \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a;b]\!])$.

Exemple : Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. On a $X\hookrightarrow\mathscr{U}([\![1;6]\!])$ car $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et pour tout $k\in[\![1;6]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu. On a $X\hookrightarrow\mathscr{U}([\![1;n]\!])$ car $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$.

Proposition 7 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Si $X\hookrightarrow\mathscr{U}([\![1;n]\!])$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Proposition 8 :

Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a;b \rrbracket)$ alors $X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; b-a+1 \rrbracket)$ et donc :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

4.1.2 Loi de Bernoulli

Définition 9 :

Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \{0;1\}$ et :

$$\mathbb{P}(X=0) = 1-p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X=1) = p.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues : une que l'on qualifie de « succès » de probabilité p et l'autre que l'on qualifie « d'échec » de probabilité $1-p$. On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un « succès », la variable aléatoire prend la valeur $X = 1$, et sinon $X = 0$.

Exemple : On lance une pièce équilibré et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est « Pile » et 0 sinon. Alors, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 9 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Alors, X admet une espérance et une variance et on a :

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = p(1-p).$$

4.1.3 Loi binomiale

Définition 10 :

Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres** $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \llbracket 0;n \rrbracket$ et que :

$$\forall k \in \llbracket 0;n \rrbracket, \qquad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

On répète n épreuves identiques de Bernoulli <u>indépendantes</u>. La probabilité d'obtenir un « succès » lors de la réalisation d'une épreuve est p. La variable aléatoire qui compte le nombre de succès obtenus une fois que les n épreuves ont été réalisées suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Exemple : On lance 10 fois de suite un dé non truqué, et on note X le nombre de numéros obtenus inférieurs ou égaux à 2. Alors, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$.

Remarque : La loi de Bernoulli est le cas particulier de la loi binomiale avec $n = 1$.

Proposition 10 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

4.2. Lois discrètes infinies

4.2.1 Loi géométrique

Définition 11 :

Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple : On lance indéfiniment un dé non truqué. On note X le rang du lancer qui donne le nombre 1 pour la première fois. Alors, X suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

Remarque :

- Cet exemple est typique de la loi géométrique dont le modèle est le suivant :
  - ◇ On réalise une succession d'épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.
  - ◇ On note X le rang de l'épreuve qui a amené le premier succès. X est considéré comme « le temps d'attente du premier succès ».
- On a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Proposition 11 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple : On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 7 boules noires et 3 boules rouges et on note Y le rang de la première boule rouge. Reconnaître la loi de Y puis déterminer l'espérance et la variance de Y.

Y correspond au temps d'attente du premier succès lors de la répétition successive d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{3}{10}$.

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y) = \frac{1-\frac{3}{10}}{\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{70}{9}$$

4.2.2 Loi de Poisson

Définition 12 :

Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Remarque :

- La loi de Poisson est parfois appelée **loi des évènements rares**. Elle sert par exemple à modéliser :
  - le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps donné;
  - le nombre de véhicules franchissant un poste de péage dans un intervalle de temps donné;
  - le nombre de clients se présentant dans un magasin dans un intervalle de temps donné;
  - le nombre de fautes de frappe dans les pages d'un cours de maths , etc.
- On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Proposition 12 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

5. Exercices

4.1 Le nombre de pannes journalières d'une machine est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

x	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=x)$	0,30	0,20	0,15	0,15	0,10	0,05	0,05

1. Quelle est la fonction de répartition de X ? En donner une représentation graphique.
2. Quelle est la probabilité que la machine ait strictement plus de 3 pannes ?
3. Trouver x_0 tel que $\mathbb{P}(X \geqslant x_0) = 0,5$.
4. Trouver x_1 tel que $\mathbb{P}(X \leqslant x_1) = 0,8$.
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

4.2 Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On prend au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

4.3 Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage une boule blanche supplémentaire. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage final où apparaît une boule noire.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1.$$

4.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de support $\mathbb{N}^*$, dont la loi est donnée par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X=n) = u_n.$$
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

4.5 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k) = a3^{-k}.$$

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.

2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?

4.6

1. Pour jouer à ce jeu, on mise 0,50 euro. On lance deux dés non truqués. Si on obtient deux nombres 1, on reçoit 2 euros. Si on obtient deux nombres identiques autres que 1, on reçoit 1 euro et sinon on ne reçoit rien. X est la gain algébrique.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Justifier que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. On lance une pièce de monnaie non truquée jusqu'à obtenir pour la première fois « pile ». X est égal au nombre de lancers effectués.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Justifier que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.

4.7 A chaque balade à cheval qu'il effectue, la probabilité que le cavalier soit désarçonné est égale à $\dfrac{1}{10}$.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait fait k chutes au terme de 10 balades ?
2. Sachant que 3 chutes entraînent obligatoirement une blessure grave, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas blessé après ces 10 balades ?

4.8 On considère une pièce dont la probabilité d'avoir pile est de 0,3.

1. On lance la pièce 10 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ?
2. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Combien en moyenne effectuera-t-on de lancer ?

4.9 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \neq 1$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$. En déduire alors que

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{(X>l)}(X > k+l) = \mathbb{P}(X > k).$$

On dit que la variable aléatoire est sans mémoire.

4.10 Sur le marché du travail de l'agglomération dunkerquoise, le nombre moyen de changements d'emploi d'un ouvrier dans une période de 5 ans est deux. Sachant que le nombre de changements d'emploi en 5 ans suit une loi de Poisson, calculer la probabilité des événements suivants :

1. Probabilité qu'un travailleur ne fasse aucun changement pendant 5 ans.
2. Probabilité qu'un travailleur fasse au moins un changement.
3. Probabilité qu'il fasse plus d'un changement, mais moins de 5.

4.11 **Extrait de ESC 2014**

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elles souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.
On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1. **a.** Reconnaître la loi de X_1. Décrire l'ensemnle $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1. Donner $\mathbb{P}(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.

   b. Donner $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.

   c. Expliquer pourquoi X_2 et X_2 suivent la même loi que X_1.

2. **a.** Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.

   b. En déduire la probabilité $\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$.

   c. Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\dfrac{1}{81}$.

3. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. D'après **2.c)**, on a $\mathbb{P}(Z = 1) = \dfrac{1}{81}$. Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z.

4. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.

   a. Justifier que $\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)$.

   b. En déduire $\mathbb{P}(Y_1 = 0)$ puis $\mathbb{E}(Y_1)$. On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.

   c. Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et vérifier que

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{211}{81}$$

4.12 Extrait de ECRICOME 2013

Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité.

Partie I - Probabilités conditionnelles
On admet que 5% des appareils présentent un défaut.
On contrôle les appareils d'un lot. Ce contrôle refuse 90% des appareils avec défaut et accepte 80% des appareils sans défaut. On prélève au hasard dans le lot.

On considère les évènements suivants :
- D : « l'appareil a un défaut » ;
- A : « l'appareil est accepté à l'issue du contrôle ».

1. Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P}(D), \quad \mathbb{P}(\overline{D}), \quad \mathbb{P}_D(\overline{A}), \quad \mathbb{P}_D(A), \quad \mathbb{P}_{\overline{D}}(A).$$

2. Calculer à 0,01 près les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(A \cap D), \qquad \mathbb{P}(A \cap \overline{D})$$

3. Déduire de ce qui précède la probabilité $\mathbb{P}(A)$ à 0,001 près.

4. Calculer à 0,001 près la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

Partie II - Loi binomiale

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification. La livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils **sans défaut** de ce prélèvement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Préciser $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, donner la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$.
2. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les appareils soient sans défaut.
3. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un appareil ait un défaut.

4.13 Extrait de ESC 2012

Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de 20 questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- l'élève A ne connaît que 60% de son cours, c'est-à-dire que, pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{60}{100}$;
- Lorsqu'il ne connait pas une réponse à une question, il répond au hasard ;
- les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les évènements :

- R : « l'élève A connaît la réponse à la première question ».
- J : « l'élève A répond juste à la première question ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $\mathbb{P}(J) = \frac{11}{15}$.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.
2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et, pour chacune de ces valeurs k, la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$.
3. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance de X.
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.
   Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.
   a. Justifier l'égalité : $N = 3X - 40$.
   b. En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

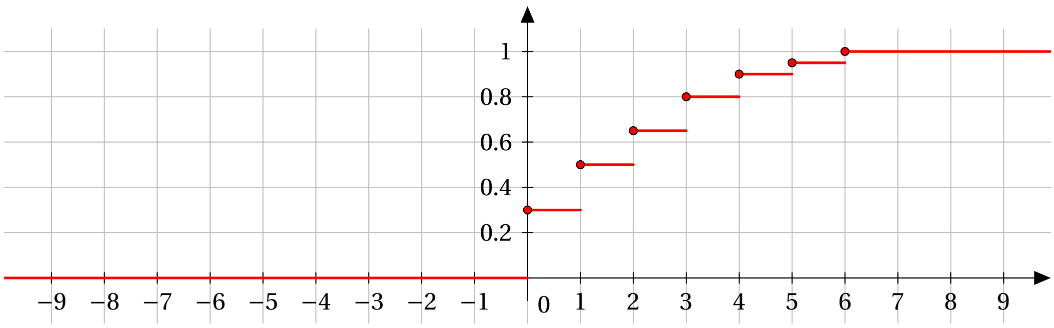
   L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.
5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
   a. Déterminer la loi de Y.
   b. En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
   c. En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?

6. Corrigé des exercices

4.1

1. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,3 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0,5 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 0,65 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0,80 & \text{si } 3 \leqslant x < 4 \\ 0,90 & \text{si } 4 \leqslant x < 5 \\ 0,95 & \text{si } 5 \leqslant x < 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$



2. La probabilité que la machine ait strictement plus de 3 pannes est :

$$\mathbb{P}(X > 3) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) = 0,1 = 0,05 + 0,05 = 0,2$$

3. On a :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = \sum_{k=2}^{6} \mathbb{P}(X = k) = 0,5$$

Donc, $x_0 = 2$ convient.

4. On a :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 3) = \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(X = k) = 0,8$$

Donc, $x_1 = 3$ convient.

5. On a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,2 + \cdots + 6 \times 0,05 = 1,9$$

4.2

1. On a $X(\Omega) = [\![0;3]\!]$.

2. On note B_k l'évènement « la k-ième boule tirée est blanche » et N_k l'évènement « la k-ième boule tirée est noire ». Calculons les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in [\![0;3]\!]$.
D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\mathbb{P}_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{42}$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3) \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \\
&= \frac{10}{63} + \frac{10}{63} + \frac{10}{63} \\
&= \frac{30}{63} \\
&= \frac{10}{21} \\
&= \frac{20}{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3) + \mathbb{P}(B_1 \cap N_2 \cap B_3) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2 \cap B_3) \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \\
&= \frac{5}{42} + \frac{5}{42} + \frac{5}{42} \\
&= \frac{15}{42}
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{21} = \frac{2}{42}$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{2}{42}$

3. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{5}{42} + 1 \times \frac{20}{42} + 2 \times \frac{15}{42} + 3 \times \frac{2}{42} = \frac{56}{42} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{5}{42} + 1^2 \times \frac{20}{42} + 2^2 \times \frac{15}{42} + 3^2 \times \frac{2}{42} = \frac{98}{42} = \frac{49}{21} = \frac{7}{3}$$

Donc, d'après la formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{7}{3} - \frac{16}{9} = \frac{21}{9} - \frac{16}{9} = \frac{5}{9}$$

Et donc,

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}}$$

4.3

1. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2. Notons B_k (resp. N_k) l'évènement « la k-ième boule tirée est blanche (resp. noire) ». Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots B_{k-1} \cap N_k)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1}\\ &= \frac{1}{k(k+1)}\end{aligned}$$

3. Tout d'abord, remarquons que :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Dès lors, calculons la n-ième somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Donc, la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X=n)$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$$

4.4

1. Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité, il faut montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$$

Dès lors, calculons la n-ième somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Or,
$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1}=1$$
Donc, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$$
Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.

2. X admet une espérance, si et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$ converge. Or, pour tout $n\geqslant 1$, on a :
$$n\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)=nu_n=n\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n}-\frac{n}{n+1}=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$
Il faudrait donc montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+1}$ converge. Or, on sait que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge. Donc, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+1}$ diverge également.
Conclusion : X n'admet pas d'espérance.

4.5

1. Pour que l'on définisse bien une loi de probabilité, il faut que la série $\sum_{n\geqslant 0} a\times 3^{-n}$ converge et que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a3^{-k}=1$$
Calculons la n-ième somme partielle :
$$\sum_{k=0}^{n} a3^{-k}=a\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$$
On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3}\in]-1;1[$, donc la série converge et :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a3^{-k}=a\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3a}{2}$$
Cette somme vaut donc 1, si et seulement si, $a=\frac{2}{3}$.

2. La probabilité que X prenne des valeurs paires est donnée par :
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=2k)=\sum_{k=0}^{+\infty} a3^{-2k}=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{9^k}$$
On reconnait une série géométrique de raison $\frac{1}{9}$. Donc,
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=2k)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{3}{4}$$

Par complémentarité, on en déduit que la probabilité que X prenne des valeurs impaires est :

$$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Donc, X a plus de chance de prendre des valeurs paires.

4.6

1. **a.** On a $X(\Omega)=\{-0,5\,;0,5\,;1,5\}$. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(X=1,5)=\mathbb{P}(\{(1;1)\})=\frac{1}{36}$$

$$\mathbb{P}(X=0,5)=\mathbb{P}(\{(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\})=\frac{5}{36}$$

$$\mathbb{P}(X=-0,5)=1-\mathbb{P}(X=0,5)-\mathbb{P}(X=1,5)=1-\frac{5}{36}-\frac{1}{36}=\frac{30}{36}$$

On peut ainsi résumer la loi de X par le tableau suivant :

x	$-0,5$	$0,5$	$1,5$
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{30}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. **a.** On a $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X=k)=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}_{k-1\text{ fois FACE}}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{PILE}}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Remarque : En fait, X suit une loi géométrique de paramètre $p=\frac{1}{2}$. En effet, X correspond au temps d'attente du premier succès lors de la répétition successive d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

b. On sait qu'une loi géométrique admet une espérance. Ainsi, X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

4.7

1. On note X le nombre de chutes au terme de 10 balades. Alors, X compte le nombre de "succès" (*i.e* de chutes) lors de 10 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{10}$. On a donc :

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{k}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{10-k}$$

2. La probabilité qu'il ne soit pas blessé après ces 10 balades, est :

$$\mathbb{P}(X\leqslant 2)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)$$

On a :

$$\mathbb{P}(X=0)=\binom{0}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^{10}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\binom{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^{9}=10\times\frac{1}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{9}=\left(\frac{9}{10}\right)^{9}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{2}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{8}=45\times\frac{1}{100}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{8}=\frac{9}{20}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{8}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{9}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X\leqslant 2)=\left(\frac{9}{10}\right)^{10}+\frac{3}{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{9}=\frac{24}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{9}$$

4.8

1. On note X le nombre piles obtenus lors de ces 10 lances. X compte le nombre de succès lors de la répétition de 10 expériences de Bernoulli successives, identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,3$. On a donc,
$$\mathbb{P}(X=3)=\binom{10}{3}\times 0,3^3\times 0,7^7=120\times 0,3^3\times 0,7^7$$
2. On note X le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir pile. X correspond au temps d'attente du premier succès lors de la répétition d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $p=0,3$. Ainsi, X admet une espérance et :
$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0,3}=\frac{10}{3}\simeq 3,3$$
En moyenne, on effectue donc 3,3 lancers avant d'obtenir PILE.

4.9 On a :

$$\mathbb{P}(X>k)=1-\mathbb{P}(X\leqslant k)$$

Or,

$$\mathbb{P}(X\leqslant k)=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{k}(1-p)^{j-1}\times p=p\times\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}=1-(1-p)^k$$

Et donc, on a :

$$\mathbb{P}(X>k)=1-\mathbb{P}(X\leqslant k)=1-(1-(1-p)^k)=(1-p)^k$$

On a alors :

$$\mathbb{P}_{(X>l)}(X>k+l)=\frac{\mathbb{P}((X>l)\cap(X>k+l)}{\mathbb{P}(X>l)}=\frac{\mathbb{P}(X>k+l)}{\mathbb{P}(X>l)}=\frac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^l}=(1-p)^k=\mathbb{P}(X>k)$$

4.10 Notons X le nombre de changements d'emploi en 5 ans. On sait que X suit une loi de Poisson. Notons λ son paramètre. On sait que le nombre moyen de changements d'emploi en 5 ans est de deux. Autrement dit, on a :

$$\mathbb{E}(X)=\lambda=2$$

Ainsi, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=2$.

1. On a :
$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=e^{-2}\simeq 0,13$$
La probabilité qu'un travailleur ne fasse aucun changement en 5 ans est de environ 0,13.
2. On a :
$$\mathbb{P}(X\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(X=0)\simeq 1-0,13=0,87$$
La probabilité qu'un travailleur fasse au moins un changement en 5 ans est de 0,87.
3. On a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(1\leqslant X\leqslant 5)&=\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)\\&=\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}+\frac{2^3}{3!}e^{-2}+\frac{2^4}{4!}e^{-2}+\frac{2^5}{5!}e^{-2}\\&=\left(2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}\right)e^{-2}\\&=\frac{94}{15}e^{-2}\\&\simeq 0,81\end{aligned}$$

4.11

1. **a.** X_1 compte le nombre de succès (*i.e* le nombre de personnes descendant à l'étage 1) lors de la répétition successive de 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{1}{3}$.
On a $X_1(\Omega)=[\![0;5]\!]$ et pour tout $k\in X_1(\Omega)$:
$$\mathbb{P}(X_1=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{5}{k}\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\times\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$$
b. Puisque X_1 suit une loi binomiale, on a :
$$\mathbb{E}(X_1)=np=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$
$$\mathbb{V}(X_1)=np(1-p)=\frac{5}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$$
c. Puisque chaque personne choisit un étage de manière équiprobable, la probabilité pour une personne de monter à l'étage 1, 2 ou 3 est la même. Ainsi, X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.
2. **a.** $X_1+X_2+X_3$ représente le nombre de personnes étant descendus à l'étage 1, 2 ou 3. Puisque les 5 personnes choisissent de descendre à l'un de ces trois étages, on a bien :
$$X_1+X_2+X_3=5$$
b. L'évènement $(X_1=0)\cap(X_2=0)$ correspond au fait que personne ne soit descendu à l'étage 1 ou à l'étage 2, autrement dit que tout le monde soit descendu à l'étage 3. Ainsi,
$$\mathbb{P}((X_1=0)\cap(X_2=0))=\mathbb{P}(X_3=5)$$
Et puisque X_3 suit la même loi que X_1, on a :
$$\mathbb{P}(X_3=5)=\binom{5}{5}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}$$

c. L'ascenseur ne s'arrête qu'une fois si et seulement si :
- tout le monde descend à l'étage 1, ce qui correspond à l'évènement $X_1 = 5$;
- tout le monde descend à l'étage 2, ce qui correspond à l'évènement $X_2 = 5$;
- tout le monde descend à l'étage 3, ce qui correspond à l'évènement $X_3 = 5$.

Ainsi, la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = 5) + \mathbb{P}(X_2 = 5) + \mathbb{P}(X_3 = 5) = \frac{1}{243} + \frac{1}{243} + \frac{1}{243} = \frac{3}{243} = \frac{1}{81}$$

3. L'ascenseur s'arrête soit une, soit deux, soit trois fois. Ainsi,

$$Z(\Omega) = [\![1;3]\!]$$

4. a. On a $(Y_1 = 0)$ si et seulement si l'ascenseur ne s'arrête pas au premier étage. Autrement dit, $(Y_1 = 0)$ si et seulement si personne ne descend à l'étage 1. Ainsi, les évènements $(Y_1 = 0)$ et $(X_1 = 0)$ sont identiques. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \binom{5}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

b. On a donc :

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = 0) = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$$

Par ailleurs, Y_1 suit une loi de Bernoulli dont le paramètre p est donné par :

$$p = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{211}{243}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y_1) = p = \frac{211}{243}$$

c. On a $Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$. Or, Y_1, Y_2 et Y_3 ont la même espérance donc

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Y_3) = \frac{211}{243} + \frac{211}{243} + \frac{211}{243} = \frac{3 \times 211}{243} = \frac{211}{81}$$

4.12 **Partie I - Probabilités conditionnelles**

1. D'après l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}(D) = 0,05 \qquad \mathbb{P}(\overline{D}) = 0,95 \qquad \mathbb{P}_D(\overline{A}) = 0,90 \qquad \mathbb{P}_D(A) = 0,10 \qquad \mathbb{P}_{\overline{D}}(A) = 0,80$$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(A) = 0,05 \times 0,10 = 0,005$$

De même,

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{D}) = \mathbb{P}(\overline{D}) \times \mathbb{P}_{\overline{D}}(A) = 0,95 \times 0,80 = 0,765$$

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(A \cap \overline{D}) = 0,005 + 0,765 = 0,77$$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\mathbb{P}_A(D) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,005}{0,77} \simeq 0,006$$

Partie II - Loi binomiale

1. X compte le nombre de succès (*i.e* le nombre d'appareils sans défaut) lors de la répétition de 10 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,95$.
On a alors $X(\Omega) = [\![0;10]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k}(0,95)^k(0,05)^{10-k}$$

2. La probabilités que tous les appareils soient sans défaut est :

$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{10}{10}(0,95)^{10}(0,05)^0 = 0,95^{10}$$

3. La probabilité qu'au moins un appareil ait un défaut est :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 9) = 1 - \mathbb{P}(X = 10) = 1 - (0,95)^{10}$$

4.13

1. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J) &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(J) + \mathbb{P}(\overline{R}) \times \mathbb{P}_{\overline{R}}(J)\\ &= \frac{60}{100} \times 1 + \frac{40}{100} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{180}{300} + \frac{40}{300}\\ &= \frac{220}{300} = \frac{11}{15}\end{aligned}$$

2. X compte le nombre de succès (*i.e* le nombre de réponses excates) lors de la répétition de 20 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{11}{15}$.
On a alors $X(\Omega) = [\![0;20]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{20}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(\frac{4}{15}\right)^{20-k}$$

3. Puisque X suit une loi binomiale, on a :

$$\mathbb{E}(X) = np = 20 \times \frac{11}{15} = \frac{44}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{44}{3} \times \frac{4}{15} = \frac{176}{45}$$

4. a. Il y a X bonnes réponses qui rapportent chacune un point et $20-\mathrm{X}$ mauvaises réponses qui enlèvent chacune deux points. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= 1\times \mathrm{X} - 2(20-\mathrm{X}) \\ &= \mathrm{X} - 40 + 2\mathrm{X} \\ &= 3\mathrm{X} - 40 \end{aligned}$$

b. On a donc :

$$\mathrm{E}(\mathrm{N}) = \mathbb{E}(3\mathrm{X}-40) = 3\mathbb{E}(\mathrm{X}) - 40 = 3\times\frac{44}{3} - 40 = 44-40 = 4$$

$$\mathbb{V}(\mathrm{N}) = \mathbb{V}(3\mathrm{X}-40) = 3^2\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 9\times\frac{176}{45} = \frac{176}{5}$$

5. a. Y compte le nombre de succès (*i.e* le nombre de réponses excates) lors de la répétition de 20 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.

b. La note que l'élève B obtient en moyenne est donc :

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = np = 20\times\frac{3}{5} = 12$$

c. La stratégie de l'élève B est donc meilleure, en moyenne, que celle de l'élève A.

7. TABLE DES MATIÈRES