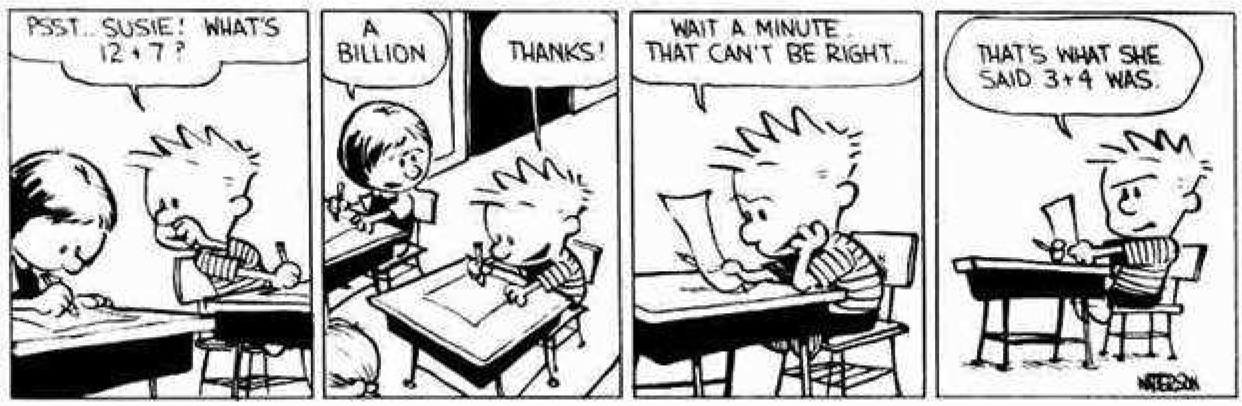
Cours de mathématiques
ECT 2ème année

Chapitre 3
Séries numériques



Adrien Fontaine
Année scolaire 2020–2021

1. Convergence

1.1. Définitions

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\,.$$

La série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ou parfois simplement $\sum u_n$.

Le réel $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelé **la somme partielle d'indice** n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Remarque : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de **terme général** u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$. La suite des **sommes partielles** est alors $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple :

1. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n$. Son **terme général** est : $u_n = n$. Les premières **sommes partielles** sont :

   $$S_0 = 0\,, \qquad S_1 = 0+1=1\,, \qquad S_2 = 0+1+2=3\,, \qquad S_3 = 0+1+2+3=6\,, \text{ etc.}$$

   De manière générale, on peut montrer (par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$) que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**. Son **terme général** est : $u_n = \frac{1}{n}$. Les premières sommes partielles sont :

   $$S_1 = 1\,, \quad S_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,, \quad S_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{11}{6}\,, \quad S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12}\,, \text{ etc.}$$

   Il n'y a pas de formule simple pour la somme partielle S_n d'indice n.

1.2. Séries convergentes

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ étant une suite, on peut s'intéresser à sa convergence.

Définition 2 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série. Soit S_n sa somme partielle d'indice n.

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente**.

  La limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée la **somme** de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et on note :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k\,.$$

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **divergente**.
- Déterminer la **nature** de la série consiste à déterminer si elle est convergente ou divergente.

Remarque :

- L'écriture $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série **converge**! Alors que l'écriture $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ a toujours un sens, puisqu'elle désigne une suite.
- Tout comme on ne confond pas la suite (u_n), le n-ième terme u_n de cette suite et sa limite éventuelle ℓ, il convient de ne pas confondre la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, la n-ième somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et la somme éventuelle $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ de la série.
- Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies (puisqu'en réalité, ce sont des limites, et il faut donc toujours s'assurer de la convergence). C'est pourquoi on calculera (presque) toujours les sommes partielles, qui sont des sommes infinies, avant de passer à la limite.

Exemple :

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 0$. Alors, la **somme partielle d'indice** n est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0\,.$$

  La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc clairement convergente et sa limite vaut 0, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 0$ **converge** et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 1$. Alors, la **somme partielle d'indice** n est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1\,.$$

  La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} 1$ **diverge**.

1.3. Premiers exemples

1. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Son **terme général** est : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La **somme partielle d'indice** n est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

La série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad S_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Or, $\frac{1}{2}\in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$.
La série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc convergente et on a : $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$.

2. On considère la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$. Son **terme général** est : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. La somme partielle d'indice n est :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}\\
&= 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad S_n = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.
La série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ est donc convergente et on a : $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)^k = 1$.

3. On reprend l'exemple de la série harmonique. Nous verrons, à l'exercice **3.9** que cette série est divergente.

1.4. Opérations sur les séries

Les opérations sur les sommes finies se transposent, sous certaines conditions, aux séries.

Théorème 1 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et λ un réel non nul. Alors :

- Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes). Si elles sont convergentes, on a alors :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$
- Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont toutes les deux convergentes, alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ est également convergente, et on a :
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Remarque : Attention ! La réciproque du deuxième point n'est pas vraie ! La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ n'assure pas du tout la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

Exemple : Par exemple, si pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge alors que ni $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ni $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ne convergent (voir les exemples précédents).

1.5. Suites et séries

Théorème 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est convergente. Dès lors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et en notant ℓ sa limite, on a :
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) = \ell - u_0.$$

Théorème 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque : Attention ! La réciproque est fausse : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Corollaire 1 :

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.

Exemple : Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^2}{n+1}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{3^n}{2^n-3^n}$ sont divergentes.

1.6. Convergence absolue

Définition 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}|u_n|$ est convergente.

Théorème 4 :

Toute série absolument convergente est convergente.

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse. En effet, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente. (voir l'exercice **3.9**)

2. Séries de référence

2.1. Série géométrique

Définition 4 :

Pour tout réel q, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ s'appelle série géométrique de raison q.

Exemple : On a vu précédemment que la série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ converge et que sa somme vaut 2. En fait, plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 5 :

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente, si et seulement si, $|q|<1$. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

2.2. Série exponentielle

Définition 5 :

Soit $x\in\mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ est appelée série exponentielle.

Théorème 6 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, a série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge, et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Exemple :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} = e.$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln(5))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln(5))^k}{k!} - \frac{(\ln(5))^0}{0!} = e^{\ln(5)} - \frac{1}{1} = 5 - 1 = 4.$

Méthode 1 : Étudier la nature d'une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et/ou calculer sa somme éventuelle

- On regarde si le terme général tend vers 0.
  - Si la réponse est non, la série est divergente.
  - Si la réponse est oui, on ne peut pas conclure, il faut poursuivre l'étude.
- Pour poursuivre l'étude, on écrit la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
  - On regarde si on peut exprimer S_n à l'aide des sommes partielles des séries de référence en utilisant : des changements d'indices, la relation de Chasles, une mise en facteur ... puis on conclut à l'aide des résultats du cours.
  - On regarde si on peut simplifier S_n, par exemple par "téléscopage des termes". Puis, on conclut.

3. Exercices

3.1 Déterminer la nature des séries suivantes et préciser leurs sommes en cas de convergence :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^n}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} 0{,}01$
6. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$
7. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3^n}$
8. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{5}{3^n}$
9. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{5}{3^n}+\dfrac{3}{4^n}$
10. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{5^n}$
11. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{-1}{3^n}$
12. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{5}{4^{n+2}}$
13. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{3}{4^n}$
14. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n}$
15. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n}{7^{n+1}}$
16. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}$
17. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{-5^{n+1}}{n!}$
18. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2^n}{n!}$
19. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2}{3^n n!}$
20. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n\dfrac{2^n}{n!}$

3.2

1. Le but de cette question est de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ converge et de déterminer sa somme.
   a. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{3} \dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$, $\sum\limits_{k=1}^{4} \dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ et $\sum\limits_{k=1}^{5} \dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.
   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{n+1}$$
   c. Conclure.
2. À l'aide d'un raisonnement similaire à celui effectué dans la question **1**, démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.
   Indication : commencer par vérifier qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+2}$$

3. À l'aide d'un raisonnement similaire à celui effectué dans la question **1**, démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa somme.
Indication : commencer par vérifier qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

3.3 En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes :

1. $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
2. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

3.4 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 2$ par

$$u_n = \frac{n}{n^2-1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge. (On rappelle que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge).

3.5 Pour tout $n \geqslant 3$, on pose $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$,
$$0 \leqslant \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{4^n}.$$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 3$,
$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leqslant \frac{5}{48}\left(1-\frac{1}{4^{n-2}}\right).$$
3. En déduire que la suite (S_n) est majorée.
4. Étudier la monotonie de la suite (S_n).
5. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge et que :
$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leqslant \frac{5}{48}.$$

3.6 Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Vérifier que pour tout $k \geqslant 2$, on a l'encadrement :
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, on a l'encadrement :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

3. En déduire que la suite (S_n) est majorée.

4. Étudier la monotonie de la suite (S_n).

5. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que :

$$\frac{3}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 2.$$

3.7 On considère la série numérique :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n sa n-ième somme partielle.

1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n+1} - 1 \leqslant S_n.$$

3. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

3.8 Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^3}{3k^4-1}$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a : $\frac{4k^3}{3k^4-1} \geqslant \frac{4}{3k}$.

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{4n^3}{3n^4-1}$ est divergente.

3.9 Le but de cet exercice est de prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Justifier que l'on a :

$$\forall t \in [k; k+1], \quad \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

b. En déduire, par intégration, que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

c. En déduire, par sommation, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant S_n$$

d. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne converge pas absolument.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;1]$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}$.

b. En déduire que l'on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$T_n = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

c. Montrer, à l'aide du théorème des gendarmes que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$$

d. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \right) = 0$$

e. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que sa somme est donnée par :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

4. Corrigé des exercices

3.1

1. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k - 2^0 = \sum_{k=0}^{n} 2^k - 1$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $2 > 1$. Donc la série diverge.

3. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

4. Le terme général de la série est n. Or, $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Donc la série diverge.

5. Le terme général de la série est $0,01$. Or, $\lim_{n\to+\infty} 0,01 = 0,01 \neq 0$. Donc la série diverge.

6. On calcule la série géométrique de raison $\frac{3}{2} > 1$. Donc, la série diverge.

7. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

8. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k} = 5\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = 5\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5}{3^k} = 5 \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

9. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{3^k} + \frac{3}{4^k} = 5\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = 5\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

On reconnait les sommes partielles des séries géométriques de raison $\frac{1}{3} \in]-1;1[$ et $\frac{1}{4} \in]-1;1[$. Donc, la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5}{3^k} + \frac{3}{4^k} = 5 \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + 3 \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 5 \times \frac{3}{2} + 3 \times \frac{4}{3} = \frac{15}{2} + 4 = \frac{23}{2}$$

10. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{5} \in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

11. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{3^k} = -\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{3^k} = -\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

12. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5}{4^{k+2}} = 5\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^2 \times 4^k} = \frac{5}{4^2}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4^k}\right) = \frac{5}{16}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4} \in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{5}{4^{k+2}} = \frac{5}{16} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{16} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{12}$$

13. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3}{4^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{4^k}-\frac{3}{4}-3=3\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}-\frac{3}{4}-3=3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k-\frac{3}{4}-3$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}\in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{3}{4^k}=3\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-\frac{3}{4}-3=3\times\frac{4}{3}-\frac{3}{4}-3=4-\frac{3}{4}-3=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

14. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{4}{9}\in]-1;1[$. Donc la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}$$

15. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{7^{k+1}}=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{7^k}=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{7}\right)^k$$

On reconnait la somme partielle d'une série géométrique de raison $\frac{2}{7}\in]-1;1[$. Donc, la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{7^{k+1}}=\frac{1}{7}\times\frac{1}{1-\frac{2}{7}}=\frac{1}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{1}{5}$$

16. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k}{k!}$$

On reconnait la somme partielle d'une série exponentielle. Donc, la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e^1=e$$

17. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{-5^{k+1}}{k!}=-\sum_{k=0}^{n}\frac{5^{k+1}}{k!}=-5\sum_{k=0}^{n}\frac{5^k}{k!}$$

On reconnait la somme partielle d'une série exponentielle. Donc, la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-5^{k+1}}{k!}=-5e^5$$

18. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - \frac{2^0}{0!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - 1$$

On reconnait la somme partielle d'une série exponentielle. Donc, la série converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2 - 1$$

19. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{3^k}}{k!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k}{k!}$$

On reconnait la somme partielle d'une série exponentielle. Donc, la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{3^k k!} = 2e^{\frac{1}{3}}$$

20. On calcule la somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!}$$

On reconnait la somme partielle d'une série exponentielle. Donc, la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!} = e^{-2}$$

3.2

1. a. On a :

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

c. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1}=1$$

Donc, la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ converge et sa limite vaut 1. Autrement dit, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=1$$

2. Commençons par vérifier l'indication. On cherche deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+2} &\iff \frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{a(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{b(n+1)}{(n+1)(n+2)}\\
&\iff \frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{an+2a+bn+b}{(n+1)(n+2)}\\
&\iff \frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(2a+b)+(a+b)n}{(n+1)(n+2)}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a+b &=& 1\\ a+b &=& 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2b+b &=& 1\\ a &=& -b\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -b &=& 1\\ a &=& -b\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& -1\\ a &=& 1\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

Calculons alors la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\\
&= \frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\cdots}+\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}$$

Donc, la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ converge et sa limite vaut $\frac{1}{2}$. Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}$$

3. Commençons par vérifier l'indication. On cherche trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} \\
\iff\ & \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} + \frac{bn(n+2)}{n(n+1)(n+2)} + \frac{cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\
\iff\ & \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{an^2+3an+2a+bn^2+2bn+cn^2+cn}{n(n+1)(n+2)} \\
\iff\ & \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2+(3a+2b+c)n+2a}{n(n+1)(n+2)} \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{rcl} a + b + c &=& 0 \\ 3a + 2b + c &=& 0 \\ 2a &=& 1 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{rcl} a + b + c &=& 0 \\ 2a + b &=& 0 \\ 2a &=& 1 \end{array}\right. \\
\iff\ & \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \frac{1}{2} \\ b &=& -2a = -2\times\frac{1}{2} = -1 \\ c &=& -a-b = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

Calculons alors la somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \cdots \\
&+ \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4}
\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{4}$$

Donc, la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ converge et sa limite vaut $\frac{1}{4}$. Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$$

3.3

1. Calculons la somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)-\ln(k)\\ &= \ln(1)-\cancel{\ln(2)}+\cancel{\ln(2)}-\cancel{\ln(3)}+\cancel{\cdots}+\cancel{\ln(n-1)}-\ln(n)\\ &= -\ln(n)\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty$$

Donc la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ diverge.

2. Calculons la somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}\\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)}\\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k+1)}{\ln(k)\ln(k+1)} - \frac{\ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)}\\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(4)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

Donc, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$ converge et :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

3. Etudions la somme partielle de cette série. On a pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k^2-1)-\ln(k^2)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln((k-1)(k+1)-\ln(k\times k)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)+\ln(k+1)-\ln(k)-\ln(k)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)-\ln(k)+\sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)-\ln(k)\end{aligned}$$

On a d'une part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)-\ln(k) &= \ln(1)-\ln(2)+\ln(2)-\ln(3)+\ln(3)-\ln(4)+\ldots+\ln(n-1)-\ln(n)\\ &= \ln(1)-\ln(n)\\ &= -\ln(n)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)-\ln(k) &= \ln(3)-\ln(2)+\ln(4)-\ln(3)+\ln(5)-\ln(4)+\ldots+\ln(n+1)-\ln(n)\\ &= -\ln(2)+\ln(n+1)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(n)+-\ln(2)+\ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln(2) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(2).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(2) = -\ln(2).$$

On en déduit que la somme partielle converge vers $-\ln(2)$ et que donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente et que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2).$$

3.4

1. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$n^2 \geqslant n^2-1$$

Donc,

$$\frac{n^2}{n^2-1} \geqslant 1$$

D'où, en divisant par $n>0$ de chaque côté de l'inégalité,

$$u_n \geqslant \frac{1}{n}$$

2. En sommant l'inégalité précédente pour k allant de 2 à n, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Or, la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} u_k = +\infty$$

Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

3.5

1. Pour tout $n \geqslant 3$, on a, puisque $3 \geqslant e \simeq 2,71$:

$$\ln(n) \geqslant \ln(3) \geqslant \ln(e) = 1$$

En multipliant par 4^n, cela donne :

$$4^n \ln(n) \geqslant 4^n$$

En passant à l'inverse, on obtient :

$$\frac{1}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{1}{4^n}$$

Puis en multipliant par 5 :

$$\frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{4^n}$$

Par ailleurs, il est clair $\frac{5}{4^n \ln(n)} \geqslant 0$ pour $n \geqslant 3$. Donc, on a bien :

$$0 \leqslant \frac{5}{4^n \ln(n)} \leqslant \frac{5}{4^n}$$

2. En sommant cette inégalité pour k allant de 3 à n, on obtient :

$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k}$$

Or,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k} = 5 \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 5 \times \frac{1}{4^3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{4}} = 5 \times \frac{1}{4^3} \times \frac{4}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) = \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right)$$

Donc, on a bien :

$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leqslant \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right)$$

3. On a :

$$1 - \frac{1}{4^{n-2}} \leqslant 1$$

Donc,

$$0 \leqslant S_n \leqslant \frac{5}{48}$$

Donc, la suite (S_n) est majorée.

4. On a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=3}^{n+1} \frac{5}{4^k \ln(k)} - \sum_{k=3}^{n} \frac{5}{4^k \ln(k)} = \frac{5}{4^{n+1} \ln(n+1)} \geqslant 0$$

Donc, la suite (S_n) est croissante.

5. La suite (S_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{5}{4^n \ln(n)}$ converge. Par ailleurs,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^{n-2}} = 0$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{48}\left(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\right) = \frac{5}{48}$$

En passant à la limite dans l'inégalité obtenue à la question 3, on obtient alors :

$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{5}{4^k \ln(k)} \leqslant \frac{5}{48}$$

3.6

1. Tout d'abord, on a :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k}$$

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k}{k(k-1)} - \frac{k-1}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2-k}$$

Par ailleurs, on a, puisque k est positif :

$$k^2 - k \leqslant k^2 \leqslant k^2 + k$$

D'où, en passant à l'inverse (tous les termes étant strictement positifs) :

$$\frac{1}{k^2+k} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k^2-k}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

2. On somme l'inégalité précédente, pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Or,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$$

De même,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}$$
$$= 1 - \frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$

Or,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$$

En ajoutant 1 à l'inégalité précédente, on obtient donc :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

3. On a $2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$ donc, en utilisant l'ingégalité de la question précédente,

$$S_n \leqslant 2$$

Et donc (S_n) est majorée par 2.

4. On a :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$

Donc, la suite (S_n) est croissante.

5. La suite (S_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. En passant à la limite dans l'inégalité de la question 2, on obtient :

$$\frac{3}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$$

3.7

1. On a :

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{(\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{k} \leqslant \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$$

D'où en passant à l'inverse dans l'inégalité précédente,

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Autrement dit,

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2. En sommant l'inégalité précédente pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k} &= \cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\cdots}+\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

Et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \mathrm{S}_n$$

Donc, on a bien :

$$\sqrt{n+1}-1 \leqslant \mathrm{S}_n$$

3. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-1 = +\infty$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$$

Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

3.8

1. Soit $k \geqslant 1$. On a :

$$3k^4-1 \leqslant 3k^4$$

Donc, en passant à l'inverse,

$$\frac{1}{3k^4-1} \geqslant \frac{1}{3k^4}$$

Et en multipliant par $4k^3 \geqslant 0$:

$$\frac{4k^3}{3k^4-1} \geqslant \frac{4k^3}{3k^4} = \frac{4}{3k}$$

2. On somme l'inégalité précédente pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k^3}{3k^4-1} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3k} = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^3}{3k^4-1}$$

Donc,

$$S_n \geqslant \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On reconnait à droite de l'inégalité la somme partielle de la série harmonique, dont on sait qu'elle est divergente. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

On a donc par comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{4n^3}{3n^4-1}$ est divergente.

3.9

1. **a.** Pour $t \in [k; k+1]$, on a $t \geqslant k$, d'où en passant à l'inverse :

$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

b. Par croissance de l'intégrale, on a donc :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$$

Or,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t)\Big]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$$
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{k} \times t\right]_k^{k+1} = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}$$

Donc, on a bien :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

c. On somme l'inégalité précédente pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) &= \cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)} + \cancel{\cdots} + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)} \\ &= \ln(n+1) - \ln(1) \\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

Donc, on a bien :

$$\ln(n+1) \leqslant S_n$$

d. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \frac{1}{k}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \mathrm{S}_n$$

Or, d'après la question précédente,

$$\mathrm{S}_n \geqslant \ln(n+1)$$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Donc, par comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = +\infty$$

Donc, la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ tend vers $+\infty$. Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ diverge. Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne converge pas absolument.

2. a. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1} &= (-t)^0 + (-t)^1 + \cdots + (-t)^{n-1}\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}(-t)^j =\end{aligned}$$

Si $t \in [0;1]$, alors $-t \neq 1$. On peut donc appliquer la formule de la somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-t)^j = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

b. On intègre l'inégalité précédente sur $t \in [0;1]$. Par linéarité de l'intégrale, cela donne :

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \mathrm{T}_n$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= \ln(2) - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien :

$$\mathrm{T}_n = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

c. Soit $t \in [0;1]$. On a :

$$t+1 \geqslant 1$$

Donc, en passant à l'inverse,

$$\frac{1}{1+t} \leqslant 1$$

Donc, en mutlipliant par $t^n \geqslant 0$,

$$\frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

Or, il est clair $\dfrac{t^n}{1+t}$ est positif pour tout $t \in [0;1]$. Donc,

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$$

Or,

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$$

d. On a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$. Donc,

$$-\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$$

e. D'après les questions **2.b.** et **2.d.**, la suite (T_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n = \ln(2)$$

Autrement dit, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

5. TABLE DES MATIÈRES