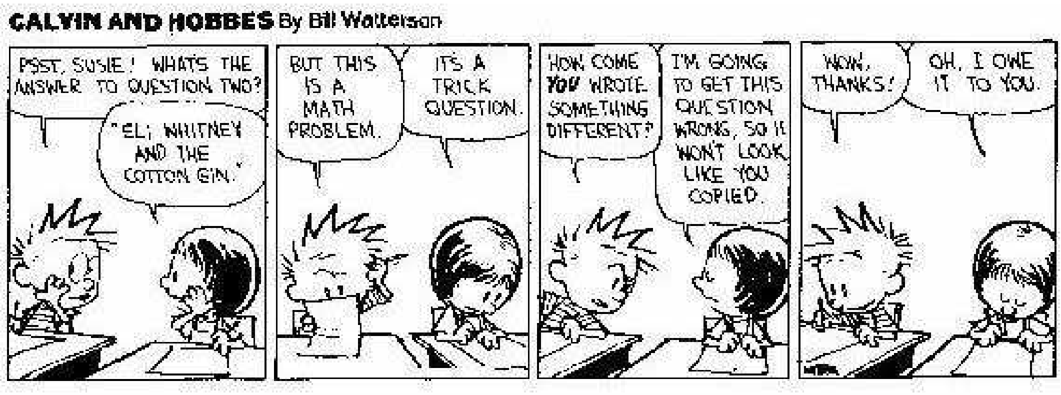
Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 9

Complément sur les suites réelles



Adrien Fontaine
Année scolaire 2018–2019

1. Propriétés éventuelles d'une suite

1.1. Suites monotones

Définition 1 : Suite croissante/décroissante/monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **strictement croissante** lorsque :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n<u_{n+1}$$
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **strictement décroissante** lorsque :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n>u_{n+1}$$
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **croissante** lorsque :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant u_{n+1}$$
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **décroissante** lorsque :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\geqslant u_{n+1}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) lorsqu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Méthode 1 : Montrer qu'une suite est croissante ou décroissante

Pour établir qu'une suite est monotone, on peut :

- étudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$. En effet, on a :
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ croissante }\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\geqslant 0$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ décroissante }\iff\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\leqslant 0$$
- Lorsque tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1. En effet, dans ce cas, on a :
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ croissante }\iff\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$$
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ décroissante }\iff\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$$

Exemple :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=u_n^2+u_n+1$ est strictement croissante : Nous avons $u_{n+1}-u_n=u_n^2+1>0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par : $u_n=\dfrac{2^n}{n+1}$ est strictement croissante : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{n+2}\times\frac{n+1}{2^n}=\frac{2\times(n+1)}{n+2}=\frac{2n+2}{n+2}=1+\frac{n}{n+2}$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs et pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exemple :

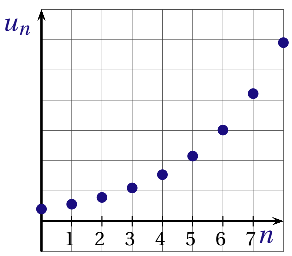
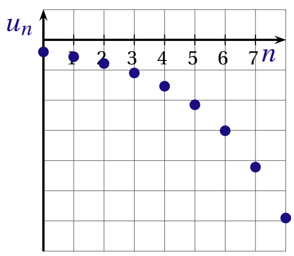
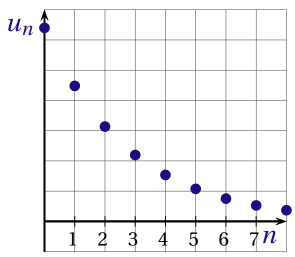
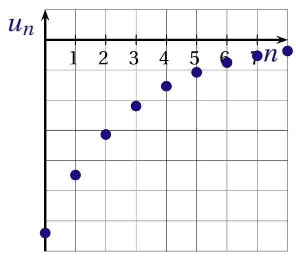
- **Cas des suites géométriques :**
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

◇ Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.

◇ Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

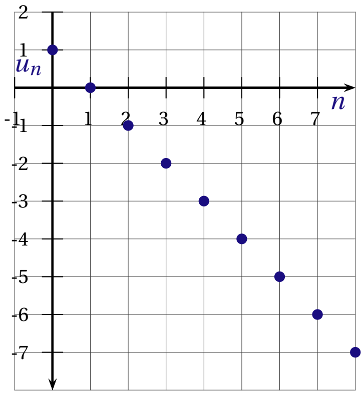
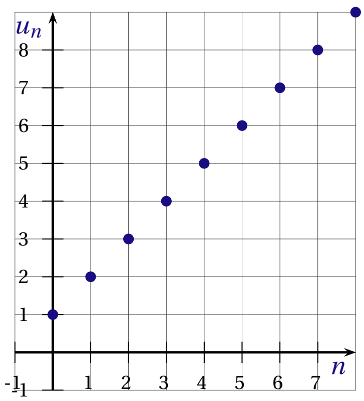
- **Cas des suites arithmétiques :**
  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors $u_{n+1} = u_n + r$ et donc

$$u_{n+1} - u_n = r$$

La monotonie de la suite dépend donc du signe de r :

◇ Si $r \leqslant 0$ alors $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

◇ Si $r \geqslant 0$ alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

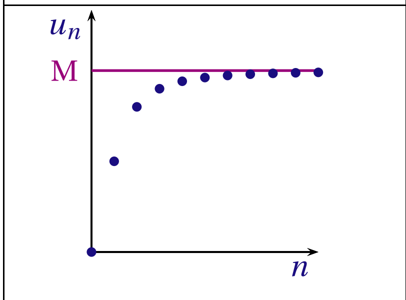
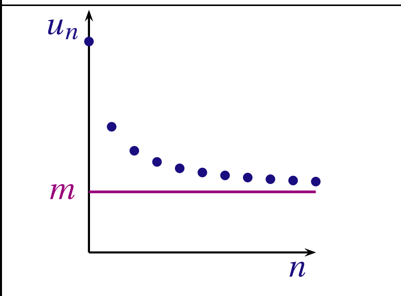
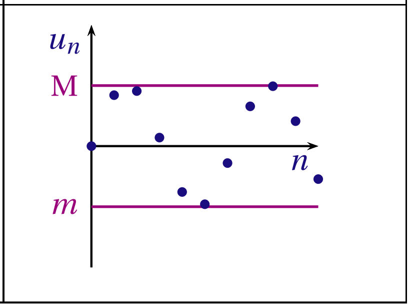
Si $r \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.	Si $r \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
	

1.2. Suite majorée/minorée/bornée

Définition 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **majorée** par M si :
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \leqslant \mathrm{M}$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **minorée** par m si :
$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
		

Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{3n^2}{n^2+1}$ est majorée par 3.

Pour tout entier n, on a :

$$u_n - 3 = \frac{3n^2}{n^2+1} - 3 = \frac{3n^2-3(n^2+1)}{n^2+1} = \frac{-3}{n^2+1}$$

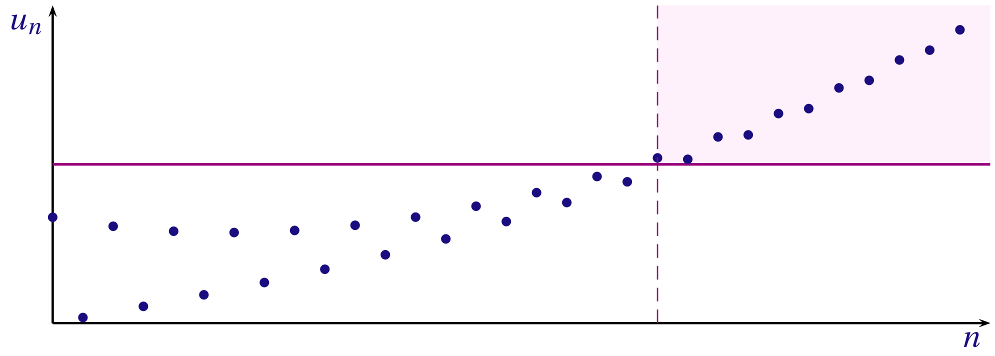
Or, $-3<0$ et $n^2+1>0$ donc $\dfrac{-3}{n^2+1}<0$. Autrement dit, $u_n-3<0$ soit $u_n<3$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien majorée par 3.

2. Limite d'une suite réelle

2.1. Limite infinie

Définition 3 :

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
- On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$



Exemple : La suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
On a : $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

2.2. Limite finie

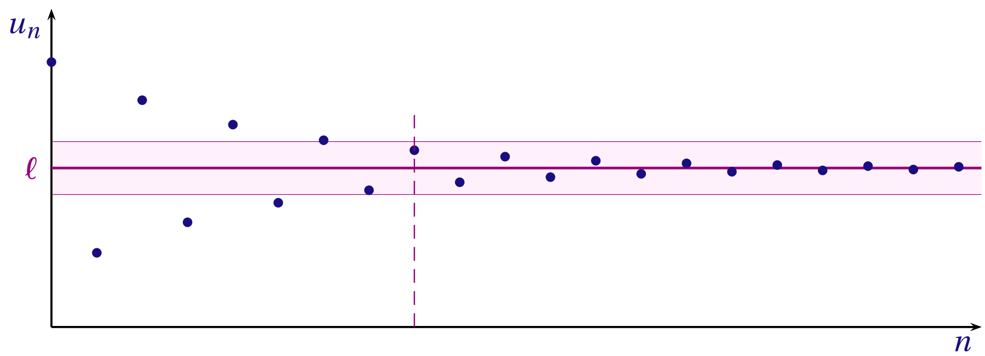
Définition 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite le réel ℓ signifie que u_n devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse n suffisamment grand. On écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite **convergente**.



Exemple : La suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ tend vers 1 en $+\infty$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1$.

Proposition 1 :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$.

Remarque : Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1. Elle n'admet pas de limite.

3. Lien entre convergence et inégalités

3.1. Minoration et majoration

Proposition 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

- Si au contraire $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

- Enfin, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

Exemple : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \left(2+(-1)^n\right) n$$

En posant $u_n = n$ pour tout n, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

C'est pourquoi on peut affirmer que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$$

3.2. Théorème des gendarmes

Théorème 1 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que

$$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$$

Si

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$$

alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{2n^2 + (-1)^n}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

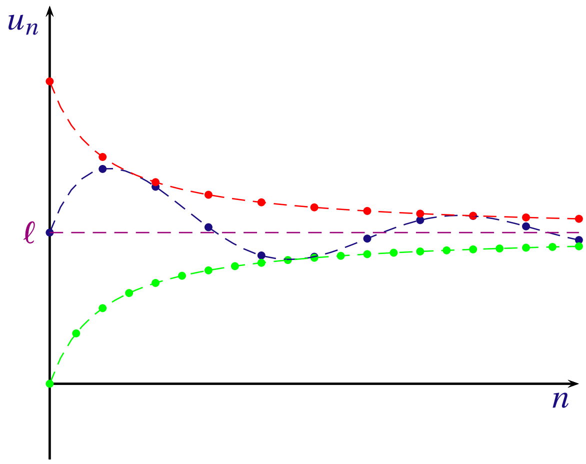
$$\frac{1}{2n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n^2-1}$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^2-1} = 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$



3.3. Théorème de convergence monotone

Théorème 2 : Théorème de convergence monotone

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \text{et } u_0 = \frac{1}{2}$$

1. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Montrer par récurrence que $u_n \in [0;1]$ pour tout entier naturel n.
Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $u_n \geqslant 3$ ».

- **Initialisation** $u_0 = \frac{1}{2} \in [0;1]$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0;1]$, donc $u_n \geqslant u_n^2$. Ainsi, $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \geqslant 0$. Par ailleurs, puisque $u_n^2 \geqslant 0$, on a $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \leqslant u_n \leqslant 1$. Bref, on a :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \quad i.e \quad u_{n+1} \in [0;1]$$

  Finalement, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in [0;1]$$

3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (question 1), et minorée par 0. Donc, d'après le théorème, elle converge.

4. Déterminer sa limite ℓ.
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. Or, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ donc en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient :

$$\ell = \ell - \ell^2$$

Autrement dt, $\ell^2 = 0$ donc $\ell = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

4. Exercices

9.1 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \dfrac{1}{n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \sqrt{n+3}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \dfrac{3^n}{n}$

9.2 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{1+u_n^2}$$
3. $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n + 1$$
4. $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = u_n + \sqrt{1+u_n}$$

9.3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -n+4$.
   - **a.** Établir le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = -x+4$.
   - **b.** En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = -v_n + 4 = f(v_n) \end{cases}$$
   - **a.** Calculer les six premiers termes de la suite.
   - **b.** Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

9.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3n + 2 \end{cases}$$
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n - \frac{1}{3}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3.
2. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Exprimer u_n en fonction de n.

9.5 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3.
2. En déduire qu'elle est bornée.

9.6 En factorisant le numérateur par 2^n et le dénominateur par 3^n, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_n = \frac{2^n + 1}{3^n + 1}$$

9.7 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9.8 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est égal à $\sqrt{1+n}$.
3. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9.9 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75 \times u_n$.

1. **a.** Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. On note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite u_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

   a. Calculer S_4.
   b. Montrer que pour tout entier n, $S_n = 64\left(1 - 0{,}75^{n+1}\right)$.
   c. Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

9.10 En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.

On remplit ce bassin avec 90 m^3 d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine $2{,}4$ m^3 d'eau dans le bassin.

On note u_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines.

On a donc $u_0 = 90$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}97 \times u_n + 2{,}4$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 80 + 10 \times 0,97^n$.

2. Étudier la monotonie de la suite u_n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.

9.11 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9.12 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 6.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9.13 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0,7$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, par récurrence, que $u_n \in]0;1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

9.14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)^3 + x$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 0,4$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < a_n < 1$.

2. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

5. Table des matières