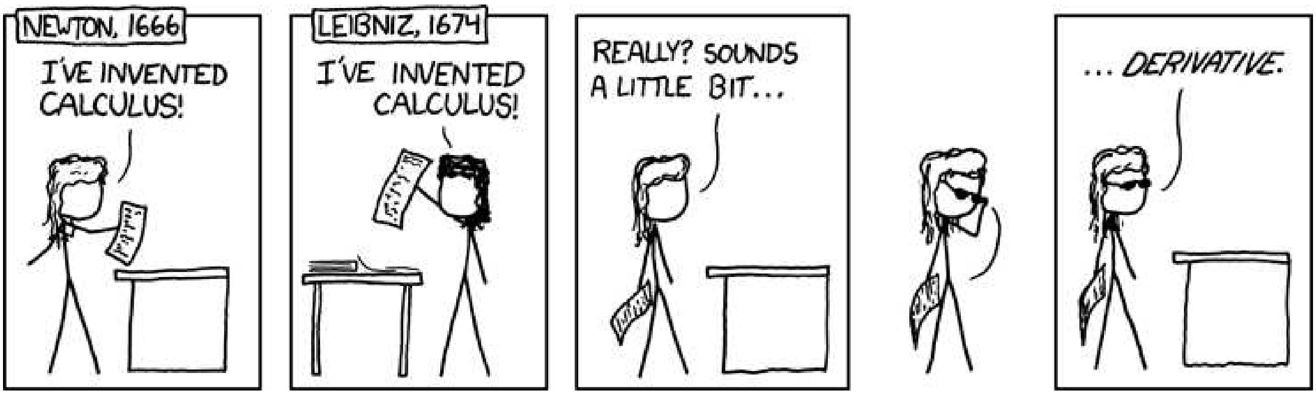
Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 8

Dérivabilité et convexité



Adrien Fontaine
Année scolaire 2018–2019

1. Dérivée en un point

1.1. Nombre dérivé

Définition 1 : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. La fonction f est dite **dérivable en** x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Exemple :

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en 1 :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1^2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 2 \quad \text{et } f'(1)=2$$

2. Plus généralement, la fonction f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x+x_0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 2x_0 \quad \text{et } f'(x_0)=2x_0$$

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \frac{\frac{x_0-x}{xx_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{xx_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x_0^2} \quad \text{et } f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Remarque :

- En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également :

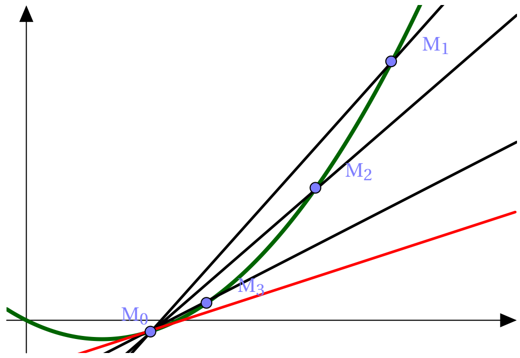
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

- En pratique, on utilise la définition seulement pour montrer la dérivabilité aux "points à problèmes". En dehors de ces points, on justifie la dérivabilité à l'aide des propriétés du paragraphe 2.

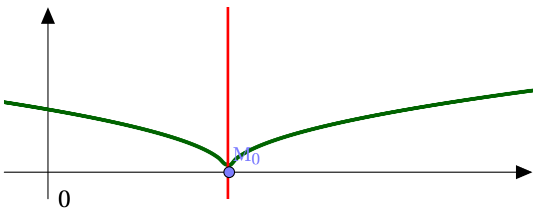
1.2. Interprétation géométrique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $x_0 \in$ I. Notons M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, et M le point de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in$ I. Le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ correspond au coefficient directeur de la droite (MM_0). Ainsi :

- Si f est dérivable en x_0, alors ce coefficient directeur tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. Par ailleurs, la droite (M_0M) tend vers une position limite qui est la tangente à la courbe représentative de f au point x_0. Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe f au point M_0.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, alors la courbe représentative de f possède en x_0 une tangente verticale d'équation $x = x_0$.



On résume cela dans la proposition suivante :

Proposition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in$ I.

- Si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse x_0. L'équation de cette tangente est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0 et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Exemple :

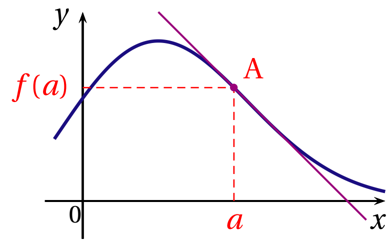
- Puisque la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en $x_0 = 1$ de dérivée $f'(1) = 2$, la courbe représentative de f admet au point M_0 de coordonnées $(1;1)$ une tangente, d'équation

$$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1.$$

- Au contraire, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point $(0;0)$.

1.3. Approximation affine

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Au voisinage de a, la tangente en a ressemble beaucoup à la courbe $\mathscr{C}_f$, on dit que la tangente est une *approximation affine* de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse a.



Théorème 1 :

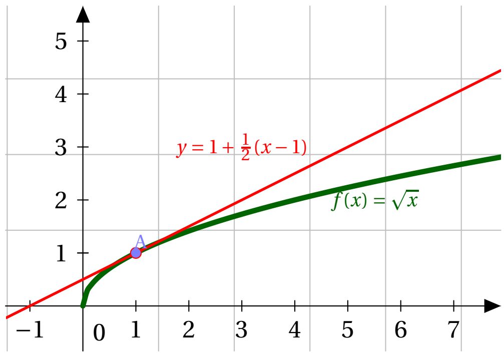
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in \mathrm{I}$. On suppose que f est dérivable en a. Alors, pour h proche de 0, on a :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Exemple : Calculer $\sqrt{1,02}$. Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 1$. f est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. Donc :

$$\sqrt{1,02} = f(1,02) \simeq 1 + \frac{1}{2}(1,02-1) = 1,01\,.$$

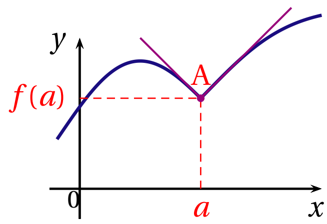
Avec une calculatrice, on obtient $\sqrt{1,02} = 1,0995$.



Corollaire 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarque : Une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la courbe ci-contre admet des demi-tangentes à gauches et à droite en a, mais pas de tangente en a.



1.4. Nombre dérivé à droite et à gauche

Définition 2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in$ I. La fonction f est dite **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à droite** de f en x_0, et est notée $f'_d(x_0)$:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

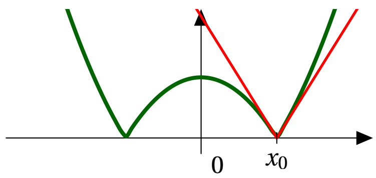
De même, f est dite **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^-. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à gauche** de f en x_0, et est notée $f'_g(x_0)$:

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Proposition 2 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in$ I. Alors, la fonction f est dérivable en x_0, si et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en x_0 ET $f'_d(x_0) = f'g(x_0)$. Dans ce cas, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

La fonction f dont la courbe est donnée ci-contre, est dérivable à gauche et à droite en x_0, mais pas en x_0, car $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$.



2. Fonction dérivée

Définition 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est **dérivable sur** I, si f est dérivable en tout point $x \in$ I. La fonction $\begin{array}{rccc} f' : & \mathrm{I} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$ est appelée la **fonction dérivée** de la fonction f.

Exemple :

- La fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

2.1. Dérivée des fonctions usuelles

Le tableau suivant indique les dérivées des fonctions usuelles :

f **définie sur ...**	$f(x)$	$f'(x)$	f **dérivable sur ...**
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ pour n entier $n \geqslant 2$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$ pour n entier $n \geqslant 1$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

2.2. Opérations sur les fonctions dérivables

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I :

Opération	**Dérivée**
Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Multiplication par une constante k	$(ku)' = k \times u'$
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
Composition	$(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$

Remarque : La formule de dérivation de la composition de deux fonctions permet de déterminer de nombreuses formules de dérivations :

Fonction	**Dérivée**
u^n pour $n > 0$	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\dfrac{1}{u}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

Exemple : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x^2 - x + 5$
  f est un polynôme et sa dérivée se calcule tout simplement :
  $$f'(x) = 4x - 1$$

- $g(x) = (x+3)\sqrt{x}$
  g est de la forme uv avec $u(x) = x+3$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Donc, $g' = u'v + uv'$. De plus,
  $$u'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
  Donc,
  $$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + (x+3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x+3}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x+3}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x+3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- $h(x) = \dfrac{2x-5}{x^2+3}$
  h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x-5$ et $v(x) = x^2+3$. Donc, $h' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. De plus,
  $$u'(x) = 2 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 2x$$
  Donc,
  $$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2(x^2+3) - 2x(2x-5)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 6 - 4x^2 + 10x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 10x + 6}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

- $i(x) = x\sqrt{x} - x$
  La fonction i est la somme de la fonction $x\sqrt{x}$ qui est un produit uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$, et qui se dérive donc comme un produit $(uv)' = u'v + uv'$, et de la fonction $-x$ dont la dérivée vaut -1. On a :
  $$u'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
  Dès lors,
  $$\begin{aligned} i'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- $j(x) = \sqrt{x^2+1}$
  j est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2+1$, donc $j' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. De plus, $u'(x) = 2x$. Donc,
  $$j'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

- $k(x) = \dfrac{1}{2x^2+3}$
  k est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 2x^2+3$ donc $k' = \dfrac{-u'}{u^2}$. De plus, $u'(x) = 4x$. Donc,
  $$k'(x) = \frac{-4x}{(x^2+3)^2}$$

Proposition 3 :

- Une fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Une fraction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

2.3. Dérivées successives

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.
La fonction f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.
La fonction f' est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6x - 6$.
La fonction f'' est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'''(x) = f^{(3)}(x) = 6$.

Définition 4 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **deux fois dérivable** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est n **fois dérivables** $(n \geqslant 1)$ si, pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque : Attention ! La notation $f^{(p)}$ n'a rien à voir avec la notion de puissance !

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{6}{(x-1)^4}.$$

On peut alors montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

3. Applications à l'étude des variations d'une fonction

3.1. Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 2 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors,

$$f \text{ est constante sur I} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque : Attention ! Le résultat est faux si I n'est pas un intervalle. Ainsi, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$, vérife $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, mais f n'est pas constante.

Théorème 3 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :
- f est croissante (resp. décroissante) sur I, si et seulement si, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) pour tout $x \in \mathrm{I}$
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I, si et seulement si, f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I **sauf éventuellement en un nombre fini de points** où f' s'annule.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Alors, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Ainsi, $f'(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$. On peut donc appliquer le deuxième point du théorème précédent. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1 : Étudier les variations d'une fonction (quand ce n'est pas une fonction classique)

- on justifie que la fonction est bien dérivable ;
- on calcule la dérivée de la fonction ;
- on détermine le signe de la dérivée avant de conclure ;

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$. Étudier les variations de la fonction f.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$. Il nous maintenant étudier le signe de ce polynôme de degré 2. Son discriminant vaut donc $\Delta = (-30)^2 - 4 \times 6 \times 36 = 36$. L'équation $6x^2 - 30x + 36 = 0$ admet donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{30 - \sqrt{36}}{2 \times 6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{30 + \sqrt{36}}{2 \times 6} = 3\,.$$

Par ailleurs, le coefficient dominant est strictement positif. On en déduit le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On prendra par ailleurs l'habitude de compléter les tableaux de variations par les limites de f aux bornes de l'intervalles et par les valeurs de f aux valeurs où f change de monotonie. Ainsi, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

et :

$$f(2) = 2 \times 2^3 - 15 \times 2^2 + 36 \times 2 + 7 = 35 \qquad \text{et} \qquad f(3) = 2 \times 3^3 - 15 \times 3^2 + 36 \times 3 + 7 = 7$$

D'où le tableau de variations complété :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	35	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

3.2. Extrema locaux

On rappelle qu'un extremum est un maximum ou un minimum.

Théorème 4 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

1. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

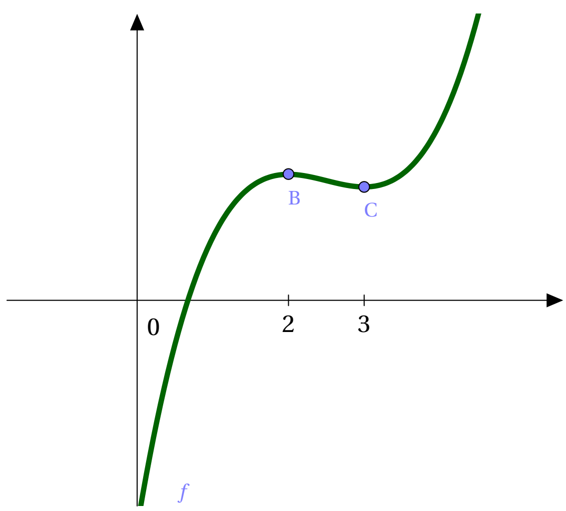
x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	*minimum*	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	*maximum*	$\searrow$	

Exemple : Reprenons l'exemple de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$. On a déjà établie le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	35	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, f' s'annule aux point 2 et 3 tout en changeant de signe. Donc, 2 et 3 sont des extrema locaux de f. D'après le tableau de variation, on peut même affirmer que 2 est un maximum local et que 3 est un minimum local.



3.3. Exemple : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.

Sur $\mathbb{R}$ f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables. $f = 1 - \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
Avec pour tout réel x,

$$u(x) = 4x-3 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 4$$

$$v(x) = x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x$$

Soit pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

2. Étudier les variations de la fonction f

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée. Étudions le signe de $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$. Pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a = 4$, $b = -6$ et $c = -4$. Le discriminant du trinôme est $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$. Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2$$

Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

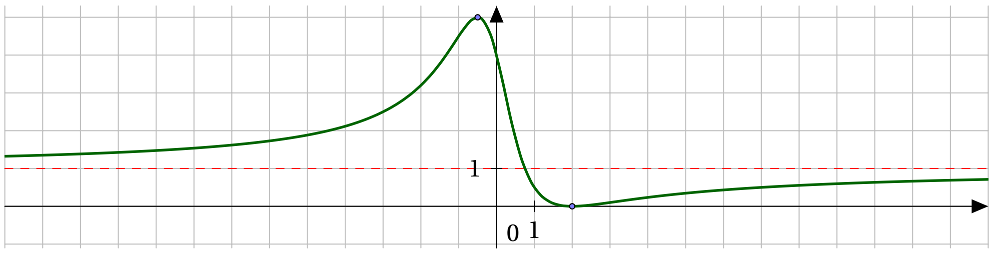
De plus, on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1$$

Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ainsi que les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.



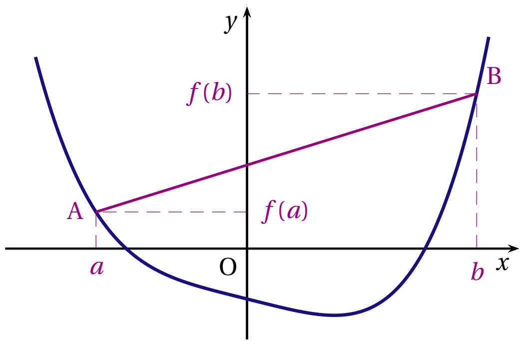
4. Convexité

4.1. Définition

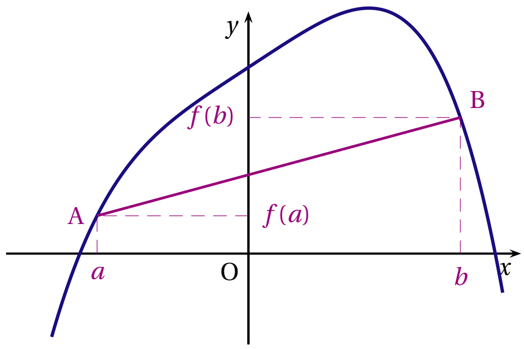
Définition 5 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessous de chacune de ses cordes.
- Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de chacune de ses cordes.



f est convexe.



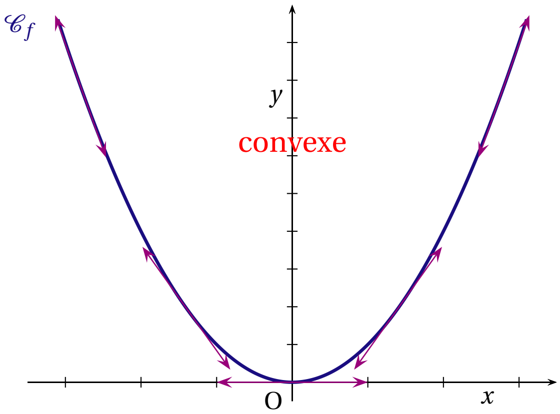
f est concave

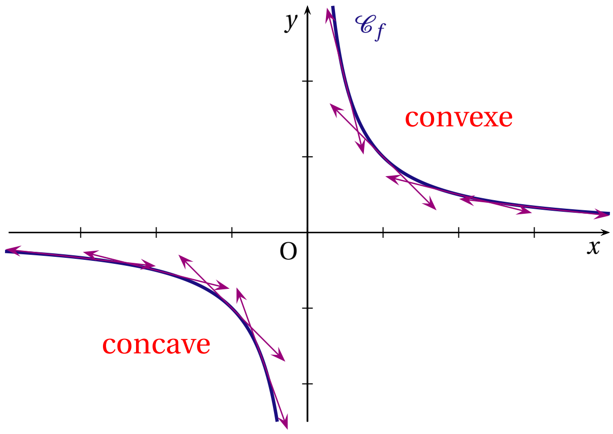
Théorème 5 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est convexe sur I, si et seulement si, sa courbe est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- f est concave sur I, si et seulement si, sa courbe est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

Exemple :





La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.

La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

4.2. Dérivation et convexité

Théorème 6 :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est convexe sur I, si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f''(x) \geqslant 0$.
- f est concave sur I, si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f''(x) \leqslant 0$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$. Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$. Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x-3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$		$\nearrow$	
convexité de f		CONCAVE		CONVEXE	

f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

4.3. Point d'inflexion

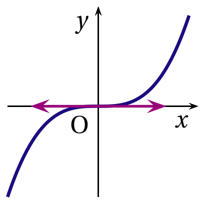
Définition 6 :

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ est un point où la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en ce point. C'est aussi le point où la convexité change de sens.

Exemple :

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $\mathrm{O}(0;0)$ du repère.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\mathrm{O}(0;0)$ est un point d'inflexion.



Théorème 7 :

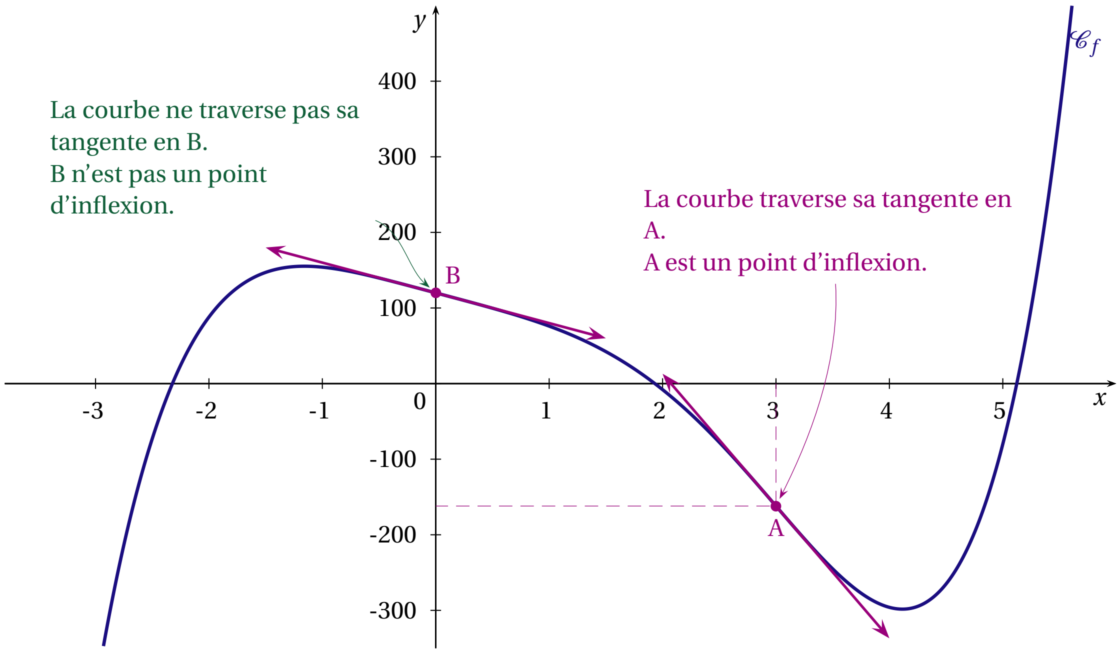
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Le point $\mathrm{M}_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, si et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en x_0.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x-3)$.
L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
variations de f'	↘				-175	↗	

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $\mathrm{A}\big(3; f(3)\big)$.
En effet :

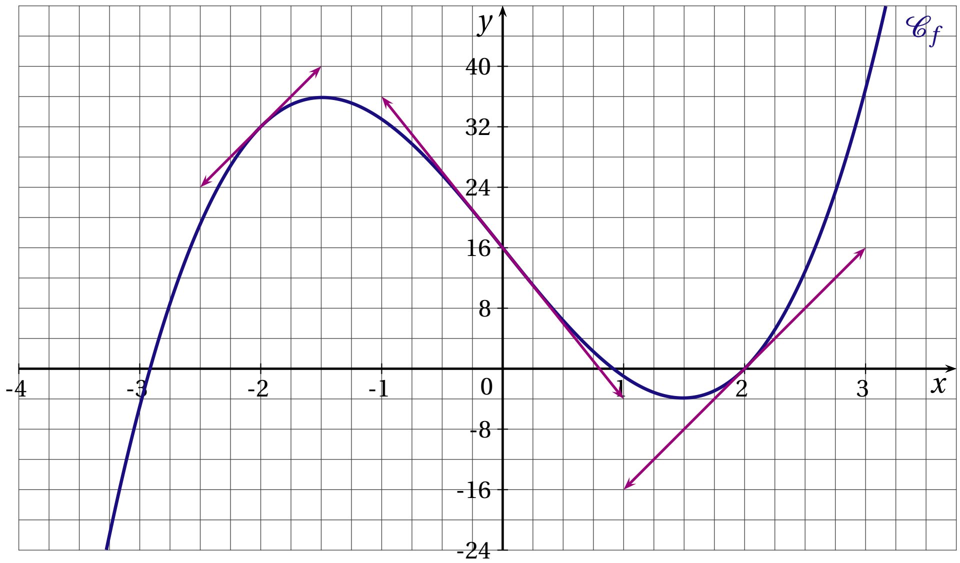
- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point $\mathrm{B}(0; 120)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$).
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $\mathrm{A}(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).



y
400
300
200
100
0
-100
-200
-300
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x
$\mathscr{C}_f$
La courbe ne traverse pas sa tangente en B.
B n'est pas un point d'inflexion.
La courbe traverse sa tangente en A.
A est un point d'inflexion.
B
A

5. Exercices

8.1 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Certaines tangentes à la courbe ont également été représentées.



Partie A : On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique :

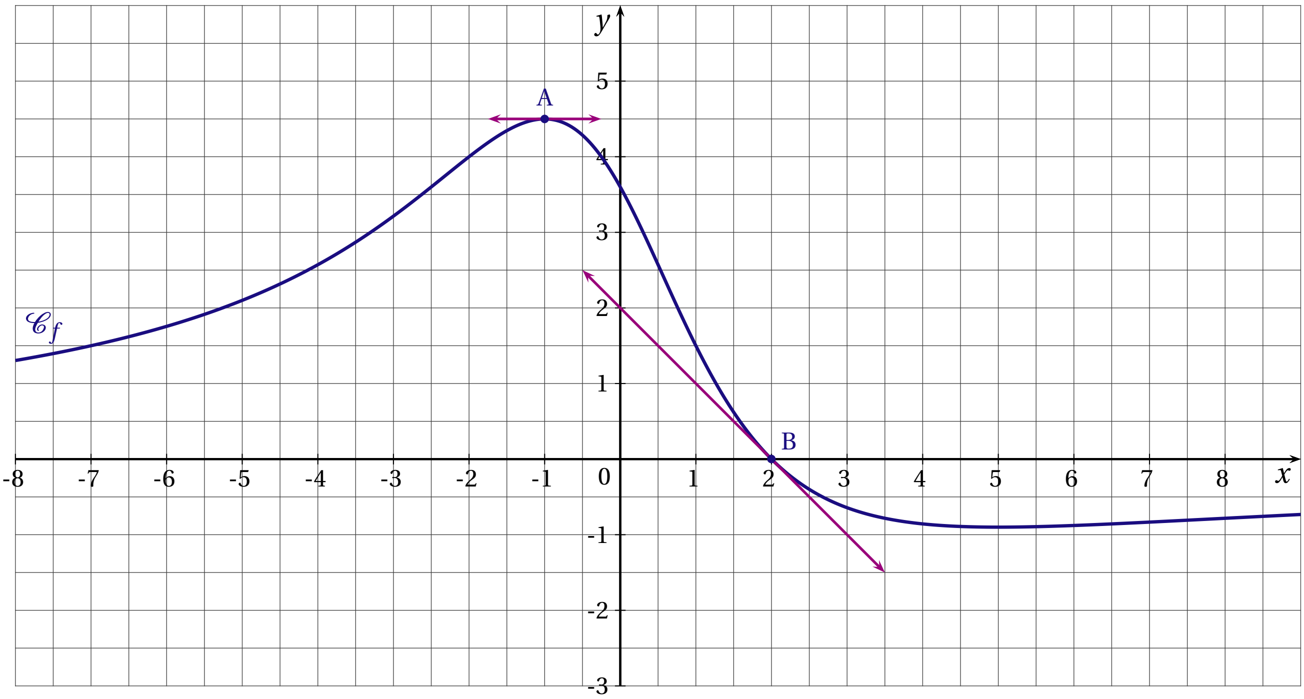
1. Déterminer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
2. Donner une estimation des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

Partie B : La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 3x^3 - 20x + 16$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(1,5)$, puis comparer ces résultats avec les valeurs obtenues dans la partie A.
3. Déterminer les abscisses des points en lesquels la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Donner le tableau de variation de la fonction f.

8.2 **Partie A :** Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- La tangente au point A$\left(-1; \dfrac{9}{2}\right)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente au point B$(2;0)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(0;2)$.



On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.
2. La tangente la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + \dfrac{7}{2}$.
   Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre choix.
   a. $f'(0) \times f'(3) \leqslant 0$.
   b. $f'(-3) \times f'(1) \leqslant 0$.

Partie B : La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{18-9x}{x^2+5}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{9\left(x^2-4x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^2}$.
2. a. Étudier le signe de $f'(x)$.
   b. Donner le tableau de variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse (-2).

8.3 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (sans donner de justification concernant l'existence de cette dérivée) :

1. $a(x) = 8x^3 + 4x^2 - 12x + 5$
2. $b(x) = (2x^2 + x - 2)(3x + 2)$
3. $c(x) = \dfrac{1}{3x-2}$
4. $d(x) = \dfrac{2x^2 + x - 2}{3x + 2}$
5. $e(x) = \sqrt{3x^2 - x - 1}$
6. $f(x) = (x^2 + 1) \times \dfrac{1}{x}$
7. $g(x) = x\sqrt{x} + x$
8. $h(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$
9. $i(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$
10. $j(x) = (2x^2 - 4x + 3)^7$

8.4 Étudier les fonctions suivantes :

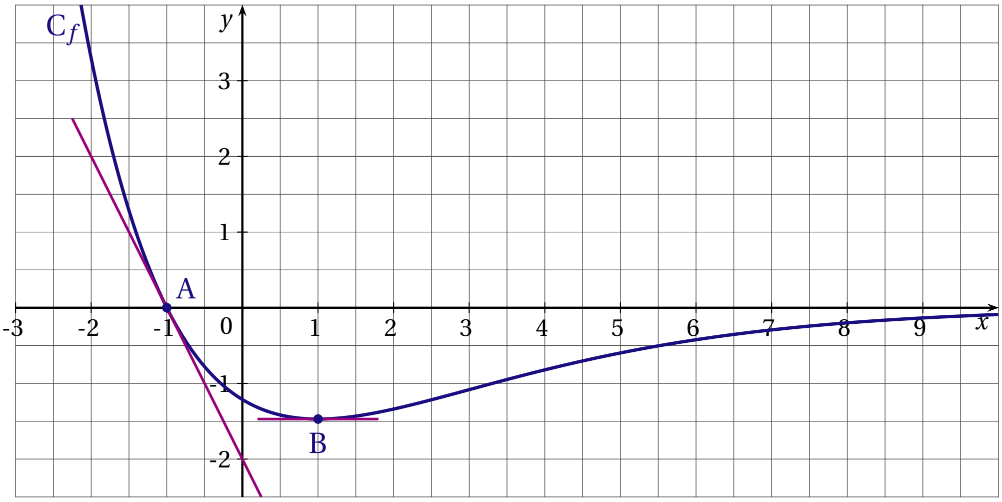
1. $a(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$
2. $b(x) = \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}$
3. $c(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 3}{x^3 - 1}$
4. $d(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

8.5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{15x + 60}{x^2 + 9}$. On note f' la dérivée de la fonction f.

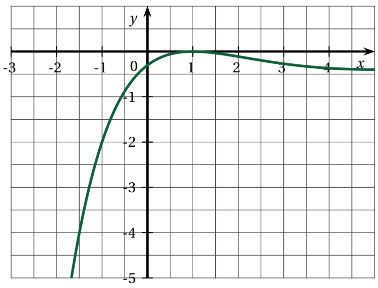
1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -4.

8.6 La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

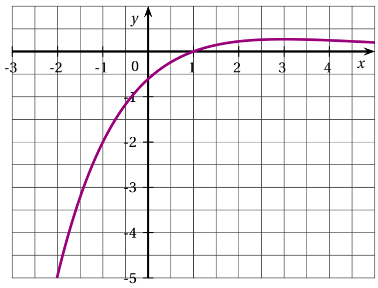
- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0; -2)$;
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses;



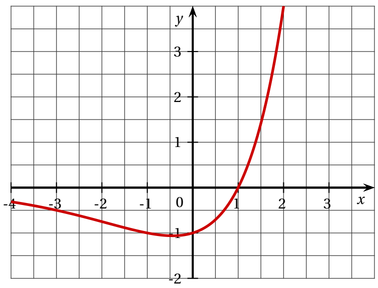
1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



courbe C_1



courbe C_2



courbe C_3

8.7 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=8x^2-2x-\dfrac{9}{2x+3}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8x\left(8x^2+23x+15\right)}{(2x+3)^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

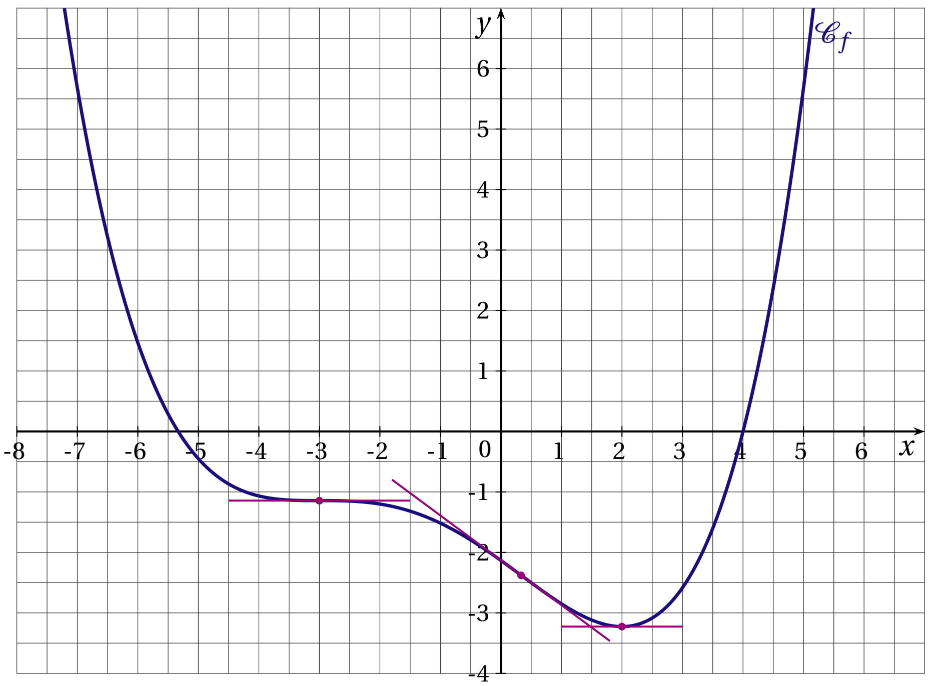
8.8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x^2+3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Étudier les variations de f.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

8.9 Étudier la convexité des fonctions définies par :

1. $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3+1$
2. $g(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$
3. $h(x)=2x^3-3x^2-12x+4$

8.10 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

À partir du graphique, déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles <, = ou > est approprié :

$f(-6)\cdots 0$	$f'(-6)\cdots 0$	$f(-1)\cdots f(3)$	$f'(-1)\cdots f'(3)$
$f'(-6)\cdots f'(-1)$	$f'(-3)\cdots 0$	$f'(2)\cdots 0$	$f'(-7)\cdots f'(3)$
$f''(-6)\cdots f''(-1)$	$f''(-3)\cdots 0$	$f''(2)\cdots 0$	$f''(-1)\cdots f''(1)$

8.11 Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$.
   b. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f.
   b. La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?

8.12 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=-x^3+16,5x^2-30x+110$.

On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer $f'(x)$.
   b. Étudier les variations de la fonction f.
2. **a.** Déterminer $f''(x)$.
   b. Étudier la convexité de la fonction f.

6. Corrigé des exercices

8.1 Partie A

1. On trouve les valeurs des dérivées en calculant la pente des tangentes :

$$f'(-2) = \frac{40-32}{-1,5-(-2)} = \frac{8}{0,5} = 16$$

$$f'(0) = \frac{-4-16}{1-0} = -20$$

$$f'(2) = \frac{16-0}{3-2} = 16$$

2. Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ correspondent aux points pour lesquels la tangente est horizontale. Graphiquement, on trouve deux solutions :

$$x_1 = -1,5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1,5$$

Partie B

1. On a :

$$f'(x) = 9x^2 - 20$$

2. On trouve donc :

$$f'(-2) = 9\times(-2)^2 - 20 = 36 - 20 = 16$$

$$f'(0) = 9\times 0^2 - 20 = -20$$

$$f'(2) = 9\times 2^2 - 20 = 36 - 20 = 16$$

On obtient bien le même résultat qu'à la question **1** de la partie **A**. Good job guys!

3. Pour trouver les points en lesquels la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses, on résout $f'(x) = 0$. On a :

$$f'(x) = 0 \iff 9x^2 - 20 = 0 \iff 9x^2 = 20 \iff x^2 = \frac{20}{9} \iff x = \pm\sqrt{\frac{20}{9}} \simeq \pm 1,5$$

4. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1.5		1.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

8.2 Partie A

1. La tangente à la courbe étant parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse -1, on a donc :

$$f'(-1) = 0$$

Pour calculer la dérivée $f'(2)$, on calcule la pente de la droite passant par B et le point de coordonnées $(0; 2)$:

$$f'(2) = \frac{0-2}{2-0} = \frac{-2}{2} = 1$$

2. Le coefficient directeur de la tangente correspond à la valeur de la dérivée. Ainsi,

$$f'(1) = -2$$

Par ailleurs, la tangente et la courbe se touchant au point d'abscisse 1, on a :

$$f(1) = -2 \times 1 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$$

3. **a.** FAUX. La courbe est décroissante au voisinage de 0 ainsi qu'au voisinage de 3, donc la dérivée est de même signe (négative) en 0 et en 3. Ainsi, $f'(0) \times f'(3) > 0$.

b. VRAI. La courbe est croissante au voisinage de -3et décroissante au voisinage de 1, donc les dérivée sont de signe opposés. Ainsi, $f'(-3) \times f'(1) \leqslant 0$.

Partie B

1. Posons $u(x) = 18 - 9x$ et $v(x) = x^2 + 5$. On a $u'(x) = -9$ et $v'(x) = 2x$. Donc,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{-9(x^2+5) - 2x(18-9x)}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{9(-x^2 - 5 - 4x + 2x^2)}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{9(x^2 - 4x - 5)}{(x^2+5)^2} \end{aligned}$$

2. **a.** Pour étudier le signe de $f'(x)$, on calcule le discriminant de x^2-4x-5 : $\Delta = 16+20 = 36$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{4-6}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4+6}{2} = 5$$

Par ailleurs, un carré étant toujours positif, on sait que $(x^2+5)^2$ est toujours positif. On en déduit le tableau de signe et de variations de f :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x^2 - 4x - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

b. Voir la question précédente.

3. Une équation de la tangente est donnée par :

$$y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$$

On a :

$$f'(-2) = \frac{9((-2)^2 - 4\times(-2) - 5)}{((-2)^2+5)^2} = \frac{9\times 7}{81} = \frac{7}{9}$$

$$f(2) = \frac{18 - 9\times(-2)}{(-2)^2+5} = \frac{36}{9} = 4$$

Donc, l'équation de la tangente en -2 est donnée par :

$$y = \frac{7}{9}(x-(-2)) + 4 = \frac{7}{9}x + \frac{14}{9} + 4 = \frac{7}{9}x + \frac{50}{9}$$

8.3

1. $a'(x) = 24x^2 + 8x - 12$

2. b est de la forme uv avec $u(x) = 2x^2 + x - 2$ et $v(x) = 3x+2$. On a :

$$u'(x) = 4x+1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 3$$

Donc,

$$\begin{aligned} b'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (4x+1)(3x+2) + (2x^2+x-2)\times 3 \\ &= 12x^2 + 8x + 3x + 2 + 6x^2 + 3x - 6 \\ &= 18x^2 + 14x - 4 \end{aligned}$$

3. c est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 3x-2$. On a :

$$u'(x) = 3$$

Donc,

$$c'(x) = \frac{-u'(x)}{u^2(x)} = \frac{-3}{(3x-2)^2}$$

4. d est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 + x - 2$ et $v(x) = 3x+2$. On a :

$$u'(x) = 4x+1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 3$$

Donc,

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(4x+1)(3x+2) - (2x^2+x-2)\times 3}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{12x^2 + 8x + 3x + 2 - 6x^2 - 3x + 6}{(3x+2)^2} \\ &= \frac{6x^2 + 8x + 8}{(3x+2)^2} \end{aligned}$$

5. e est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x^2 - x - 1$. On a :

$$u'(x) = 6x - 1$$

Donc,

$$e'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x-1}}$$

6. f est de la forme uv avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$. On a :

$$u'(x) = 2x \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2x \times \frac{1}{x} + (x^2+1) \times \frac{-1}{x^2} \\ &= 2 - \frac{x^2+1}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2} \end{aligned}$$

7. La fonction g est la somme de la fonction $x\sqrt{x}$ qui est un produit uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$, et qui se dérive donc comme un produit $(uv)' = u'v + uv'$, et de la fonction x dont la dérivée vaut 1. On a :

$$u'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

8. h est de la forme u^2 avec $u(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. u est par ailleurs un quotient et se dérive comme tel :

$$u'(x) = \frac{1 \times (x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Dès lors :

$$h'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times \frac{-2}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{-4}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

9. i est de la forme u^2 avec $u(x) = \sqrt{x}+1$. Or,
$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
Donc,
$$i'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x}+1)^2 = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2\sqrt{x}}$$

10. j est de la forme u^7 avec $u(x) = 2x^2-4x+3$. On a :
$$u'(x) = 4x-4$$
Donc,
$$j'(x) = 7(4x-4)(2x^2-4x+3)^6$$

8.4

1. On a :
$$a'(x) = 3x^2-6x+1$$
Pour étudier le signe de $a'(x)$, on calcule le discriminant de $3x^2-6x+1$: $\Delta = 36-12 = 24$. Il y a donc deux racines qui sont :
$$x_1 = \frac{6-\sqrt{24}}{6} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{6+\sqrt{24}}{6}$$
On en déduit le tableau de signes de a' ainsi que les variations de a :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$3x^2-6x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
a	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Par ailleurs, on peut calculer
$$\lim_{x\to-\infty} a(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

2. La fonction b est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2+3x+2$. On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x+3$. Ainsi,
$$\begin{aligned} b'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{x^2+3x+2-x(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+3x+2-2x^2-3x}{(x^2+3x+2)^2} \\ &= \frac{-x^2+2}{(x^2+3x+2)^2} \end{aligned}$$

On a :

$$-x^2+2=0 \iff x=\pm\sqrt{2}$$

Par ailleurs, le discriminant de x^2+3x+2 vaut : $\Delta = 9-8=1$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-3-1}{2}=-2 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-3+1}{2}=-1$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x^2+3x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$b'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
b	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

Pour compléter le tableau de variations, on calcule les limites :

$$\lim_{x\to-\infty} b(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} b(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to(-2)^-} x & = & -2 \\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} x^2+3x+2 & = & 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} b(x) = -\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to(-2)^+} x & = & -2 \\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} x^2+3x+2 & = & 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} b(x) = +\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to(-1)^-} x & = & -1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} x^2+3x+2 & = & 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} b(x) = +\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to(-1)^+} x & = & -1 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} x^2+3x+2 & = & 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} b(x) = -\infty \end{array}$$

3. Tout d'abord, on peut remarquer que 1 est racine du numérateur et du dénominateur de c. Effectuons donc les divisions euclidiennes par $x-1$:

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & & & + & 2x & - & 3 & x-1 \\ \cline{8-8}
x^3 & - & x^2 & & & & & x^2+x+3 \\ \cline{1-7}
 & & x^2 & + & 2x & - & 3 & \\
 & & x^2 & - & x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & 3x & - & 3 & \\
 & & & & 3x & - & 3 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & & & & & - & 1 & x-1 \\ \cline{8-8}
x^3 & - & x^2 & & & & & x^2+x+1 \\ \cline{1-7}
 & & x^2 & & & - & 1 & \\
 & & x^2 & - & x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & x & - & 1 & \\
 & & & & x & - & 1 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi,

$$c(x) = \frac{x^3+2x-3}{x^3-1} = \frac{(x^2+x+3)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{x^2+x+3}{x^2+x+1}$$

Calculons maintenant la dérivée de c. On pose $u(x) = x^2+x+3$ et $v(x) = x^2+x+1$. On a $u'(x) = 2x+1$ et $v'(x) = 2x+1$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
c'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{(2x+1)(x^2+x+1)-(x^2+x+3)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{2x^3+2x^2+2x+x^2+x+1-2x^3-x^2-2x^2-x-6x-3}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{-4x-2}{(x^2+x+1)^2}
\end{aligned}
$$

Il faut maintenant étudier le signe de $c'(x)$. On a $-4x-2=0 \iff x=-\frac{1}{2}$. Par ailleurs, le disriminant de x^2+x+1 vaut $\Delta = 1-4 = -3$. Il n'y a donc pas de valeur interdite. On en déduit le tableau de signes de c' ainsi que le tableau de variations de c :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-4x-2$		$+$	0	$-$	
$c'(x)$		$+$	0	$-$	
c	1	$\nearrow$	$\frac{11}{3}$	$\searrow$	1

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to-\infty} c(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} c(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

$$c\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{11}{3}$$

4. Commençons par déterminer le domaine de définition de d. Il faut pour cela résoudre $x^2+3x-4 \geqslant 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 9+16 = 25$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{D}_d =]-\infty;-4] \cup [1;+\infty[$.
Par ailleurs, on a :

$$d'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-4}}$$

On a $2x+3=0 \iff x = -\frac{3}{2}$. On en déduit le tableau de signes de d' et le tableau de variations de d :

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\sqrt{x^2+3x-4}$		$+$	0				0	$+$	
$d'(x)$		$-$						$+$	

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Variations de d	$+\infty$	$\searrow$	0				$+\infty$

8.5

1. Posons $u(x) = 15x+60$ et $v(x) = x^2+9$. On a $u'(x) = 15$ et $v'(x) = 2x$. Donc,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{15(x^2+9)-2x(15x+60)}{(x^2+9)^2} \\ &= \frac{15x^2+135-30x^2-120x}{(x^2+9)^2} \\ &= \frac{-15x^2-120x+135}{(x^2+9)^2} \\ &= \frac{15(-x^2-8x+9)}{(x^2+9)^2} \end{aligned}$$

2. Le dénominateur de $f'(x)$ est toujours positif car un carré est toujours positif. Par ailleurs, 15 étant positif, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $-x^2-8x+9$. Calculons le discriminant : $\Delta = 64+36 = 100$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{8-10}{-2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{8+10}{-2} = -9$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-9		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{15x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{15}{x} = 0^- \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{15x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{15}{x} = 0^+ \\ f(1) &= \frac{15\times1+60}{1^2+9} = \frac{75}{10} = \frac{15}{2} \\ f(-9) &= \frac{15\times(-9)+60}{(-9)^2+9} = \frac{-75}{90} = \frac{-15}{18} = \frac{-5}{6} \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-9		1		$+\infty$
Variations de f	0	$\searrow$	$-\frac{5}{6}$	$\nearrow$	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	0

4. On a :

$$y = f(-4) + f'(-4)(x-(-4)) = f(-4) + f'(-4)(x+4)$$

Or,

$$f(-4) = \frac{15\times(-4)+60}{(-4)^2+9} = 0$$

$$f'(-4) = \frac{15(-(-4)^2-8\times(-4)+9)}{((-4)^2+9)^2} = \frac{15\times25}{25^2} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Donc, l'équation de la tangente au point d'abscisse -4 est donnée par :

$$y = \frac{3}{5}(x+4)$$

8.6

1. La valeur de la dérivée en un point correspond au coefficiet directeur de la tangente à la courbe en ce point. Ainsi, pour déterminer $f'(-1)$, il suffit de calculer la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1. On a donc :

$$f'(-1) = \frac{0-(-2)}{-1-0} = -2$$

De même, pour $f'(1)$. La tangente étant cette fois parallèle à l'axe des abscisses, on a

$$f'(1) = 0$$

2. La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$. Ainsi, la fonction f' est négative sur $]-\infty; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$. Les courbes C_2 et C_3 conviennent donc.
Par ailleurs, la courbe C_f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Donc, $f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Cela exclut donc la courbe C_3.
Conclusion : la courbe représentative de la fonction f' est la courbe C_2.

8.7

1. La dérivée de $8x^2 - 2x$ est donnée par $16x - 2$. Par ailleurs, posons $u(x) = 9$ et $v(x) = 2x+3$. On a $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 16x - 2 - \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= 16x - 2 - \frac{-9\times 2}{(2x+3)^2} \\
&= 16x - 2 + \frac{18}{(2x+3)^2} \\
&= \frac{(16x-2)(2x+3)^2 + 18}{(2x+3)^2} \\
&= \frac{(16x-2)(4x^2+12x+9) + 18}{(2x+3)^2} \\
&= \frac{64x^3 + 192x^2 + 144x - 8x^2 - 24x - 18 + 18}{(2x+3)^2} \\
&= \frac{64x^3 + 184x^2 + 120x}{(2x+3)^2} \\
&= \frac{8x(8x^2 + 23x + 15)}{(2x+3)^2}
\end{aligned}$$

2. Un carré étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $8x(8x^2+23x+15)$. On a $8x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$. Par ailleurs, le discriminant de $8x^2+23x+15$ vaut $\Delta = 529-480 = 49$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-23-7}{16} = \frac{-15}{8} < \frac{-3}{2} = \frac{-12}{8} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-23+7}{16} = -1$$

On en déduit le tableau de signe de f' :

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$8x$		$-$		$-$	0	$+$	
$8x^2+23x+15$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs,

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to(-\frac{3}{2})^+} 9 = 9\\[2ex] \lim\limits_{x\to(-\frac{3}{2})^+} 2x+3 = 0^+\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to(-\frac{3}{2})^+} \dfrac{9}{2x+3} = +\infty \\[4ex] \lim\limits_{x\to(-\frac{3}{2})^+} 8x^2-2x = 21\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to(-\frac{3}{2})^+} f(x) = -\infty$$

$$f(-1) = 8\times(-1)^2 - 2\times(-1) - \frac{9}{2\times(-1)+3} = 8+2+\frac{9}{1} = 19$$

$$f(0) = 8\times 0^2 - 2\times 0 - \frac{9}{2\times 0+3} = -\frac{9}{3} = -3$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 8x^2-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} 8x^2 = +\infty\\[2ex] \left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} = 9\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+3 = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9}{2x+3} = 0^+\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	19	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

8.8

1. Posons $u(x) = x^2 - x + 4$ et $v(x) = x^2 + 3$. On a $u'(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = 2x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(2x-1)(x^2+3) - 2x(x^2 - x + 4)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 6x - x^2 - 3 - 2x^3 + 2x^2 - 8x}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

2. Un carré étant toujours positif, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $x^2 - 2x - 3$. Or, son discriminant vaut $\Delta = 4 + 12 = 16$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

On en déduit le tableau de signes de f' :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\ f(-1) &= \frac{(-1)^2 - (-1) + 4}{(-1)^2 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ f(3) &= \frac{3^2 - 3 + 4}{3^2 + 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Variations de f	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}$	$\nearrow$	1

3. Une équation de la tangente en 1 est donnée par :

$$y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

Or,

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1^2 - 1 + 4}{1^2 + 3} = \frac{4}{4} = 1 \\ f'(1) &= \frac{1^2 - 2\times 1 - 3}{(1^2+3)^2} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$y = 1 - \frac{1}{4}(x-1) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

8.9

1. Calculons la dérivée seconde de f. On a :

$$f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2$$

$$f''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x = 60(2x^2 - 3x + 1)$$

On étudie maintenant le signe de $2x^2 - 3x + 1$. Le discriminant vaut : $\Delta = 9 - 8 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+1}{4} = 1$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, f est convexe sur $]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$ et concave sur $[\frac{1}{2}; 1]$.

2. Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = x + 1$. On a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Posons maintenant $u(x) = x^2 + 2x$ et $v(x) = (x+1)^2$. On a $u'(x) = 2x + 2$ et $v'(x) = 2(x+1) = 2x + 2$. Donc,

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{(2x+2)(x^2+2x) - (2x+2)(x+1)^2}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(2x+2)(x^2+2x-(x+1)^2)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{2(x+1)(x^2+2x-x^2-2x-1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-2}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

On a $(x+1)^3 \geqslant 0 \iff x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$. On en déduit le tableau de signes de $g''(x)$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
-2	$-$		$-$
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$
$g''(x)$	$-$	$\|\|$	$+$

Ainsi, g est concave sur $]-\infty;1[$ et convexe sur $]1;+\infty[$.

3. On a :

$$h'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$h''(x) = 12x - 6$$

On a $12x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h''(x)$	$-$	0	$+$

Donc, h est concave sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$ et convexe sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

8.10 On a :

$f(-6) > 0$	$f'(-6) < 0$	$f(-1) > f(3)$	$f'(-1) < f'(3)$
$f'(-6) > f'(-1)$	$f'(-3) = 0$	$f'(2) = 0$	$f'(-7) < f'(3)$
$f''(-6) > f''(-1)$	$f''(-3) = 0$	$f''(2) > 0$	$f''(-1) < f''(1)$

8.11

1. Les coordonnées des points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses correspondent aux solutions de l'équation $f(x) = 0$. Or, on a :

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x^2} = 0$$

Il y a une unique valeur interdite qui est $x = 0$. Par ailleurs, pour résoudre $2x^2 + x - 1$, on calcule le discriminant : $\Delta = 1 + 8 = 9$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Aucune de ces deux valeurs n'est une valeur interdite. Donc, $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ sont les abscisses des deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.
Les coordonnées des deux points d'intersection avec l'axe des abscisses sont donc $(-1;0)$ et $(\frac{1}{2};0)$.

2. a. Posons $u(x) = 2x^2 + x - 1$ et $v(x) = x^2$. On a $u'(x) = 4x + 1$ et $v'(x) = 2x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\
&= \frac{(4x+1) \times x^2 - 2x(2x^2 + x - 1)}{x^4} \\
&= \frac{4x^3 + x^2 - 4x^3 - 2x^2 + 2x}{x^4} \\
&= \frac{-x^2 + 2x}{x^4} \\
&= \frac{x(2-x)}{x^4} \\
&= \frac{2-x}{x^3}
\end{aligned}$$

b. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $x^3 > 0$. Ainsi, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $2 - x$. Par ailleurs, on a $2 - x = 0 \iff x = 2$. On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	2

On a également :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 0^+} 2x^2 + x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$f(2) = \frac{2 \times 2^2 + 2 - 1}{2^2} = \frac{9}{4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Ce qui justifie les valeurs données dans le tableau de variations ci-dessus.

3. a. Calculons la dérivée seconde f'' de f. On pose $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = x^3$.

On a $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 3x^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{-x^3 - (2-x) \times 3x^2}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-x^3 - 6x^2 + 3x^3}{x^6} \\ &= \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} \\ &= \frac{2x^2(x-3)}{x^6} \\ &= \frac{2(x-3)}{x^4} \end{aligned}$$

On a $x^4 > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ donc le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $x-3$. Par ailleurs, $x - 3 = 0 \iff x = 3$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		3		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

Ainsi, f est concave sur $]0;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

b. La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse 3.

8.12

1. **a.** On a :

$$f'(x) = -3x^2 + 33x - 30 = 3(-x^2 + 11x - 10)$$

b. Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 + 11x - 10$. Calculons son discriminant : $\Delta = 121 - 40 = 81$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-11-9}{-2} = 10 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-11+9}{-2} = 1$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

$$f(1) = -1^3 + 16,5 \times 1^2 - 30 \times 1 + 110 = -1 + 16,5 - 30 + 110 = 95,5$$

$$f(10) = -10^3 + 16,5 \times 10^2 - 30 \times 10 + 110 = -1000 + 1650 - 300 + 110 = 460$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f :

x	0		1		10		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	95.5	$\nearrow$	460	$\searrow$	2

2. a. On a :

$$f''(x) = -6x + 33$$

b. On a $-6x+33=0 \iff x = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}$. On en déduit le tableau de signes de f'' :

x	$-\infty$		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi, f est convexe sur $]-\infty;\frac{11}{2}]$ et concave sur $[\frac{11}{2};+\infty[$.

7. Table des matières