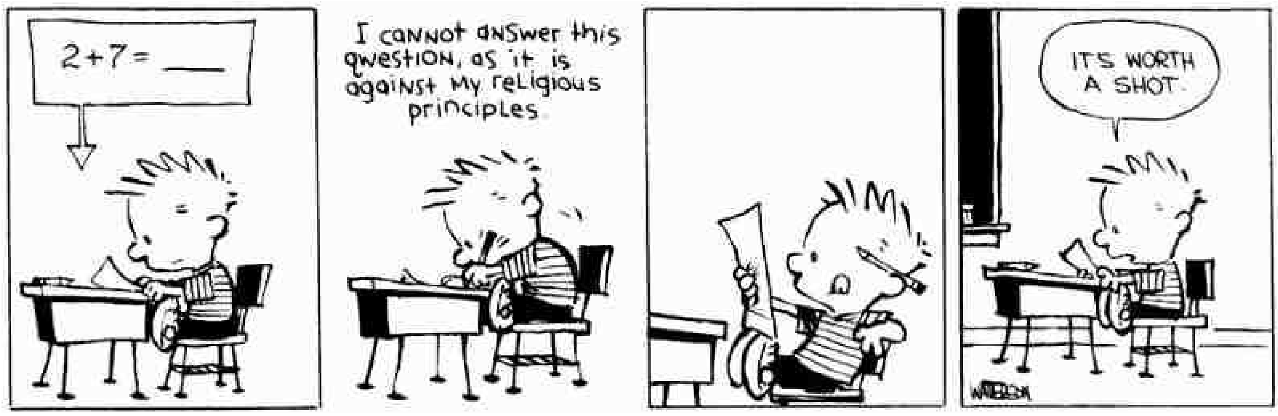
Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 7

Limites et continuité



Adrien Fontaine
Année scolaire 2020–2021

1. Notions de limite

1.1. Illustration

- Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0 :

x	1	0,5	0,1	0,01	0	−0,01	−0,1	−0,5	−1
$f(x)$	1	0,25	0,01	0,0001	0	0,0001	0,01	0,25	1

On constate que, plus x se rapproche de 0, plus x^2 se rapproche de 0.
On dit que x^2 **tend vers 0, lorsque x tend vers 0**, et on note :

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

- Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0 :

x	1	0,5	0,1	0,01	0	−0,01	−0,1	−0,5	−1
$f(x)$	1	4	100	10 000	0	10 000	100	4	1

On constate que, plus x se rapproche de 0, plus $\frac{1}{x^2}$ devient "grand".

On dit que $\frac{1}{x^2}$ **tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers 0**, et on note :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Étudions les valeurs de $f(x)$ lorsque x devient "grand" :

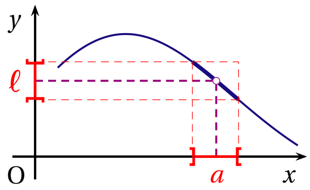
x	1	5	10	100
$f(x)$	1	0,04	0,01	0,0001

On constate que plus x devient "grand", plus $\frac{1}{x^2}$ se rapproche de 0.

On dit que $\frac{1}{x^2}$ **tend vers** 0**, lorsque x tend vers $+\infty$.** , et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

1.2. Limite finie en un point



Soit f une fonction définie au « voisinage » d'un réel a.
On dit que f *admet* ℓ *pour limite en* a lorsque $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a. On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

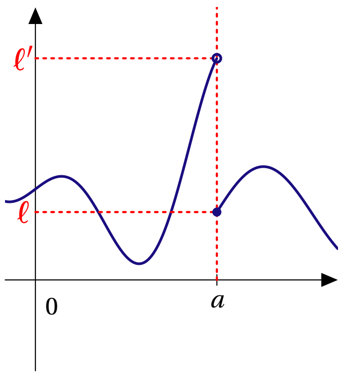
Exemple : Soit f la fonction définie sur $]-2;4[$ par $f(x) = x^2 + 3x - 5$. On a :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -5 \qquad \lim_{x\to -2} f(x) = -7 \qquad \lim_{x\to 4} f(x) = 23$$

1.3. Limite à gauche/à droite en un point

Pour certaines fonctions, il peut être utile de distinguer le comportement en un point a selon que l'on s'approche de a exclusivement par la gauche, *i.e* par valeurs inférieures, *i.e* pour des abscisses $x < a$, ou exclusivement par la droite, *i.e* par valeurs supérieures, *i.e* pour des abscisses $x > a$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.



- si lorsque x se rapproche de a par valeurs inférieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ, on dit que f admet ℓ pour *limite à gauche* en a et on note

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$$

- si lorsque x se rapproche de a par valeurs supérieures, $f(x)$ se rapproche de ℓ, on dit que f admet ℓ pour *limite à droite* en a et on note

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$$

1.4. Limite infinie en un point

Une fonction f peut également avoir une limite infinie en un point, *i.e* prendre des valeurs positives ou négatives aussi grande que l'on veut.
Plus précisément, pour une fonction f, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers a, si $f(x)$ peut prendre des valeurs **positives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a. On note alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

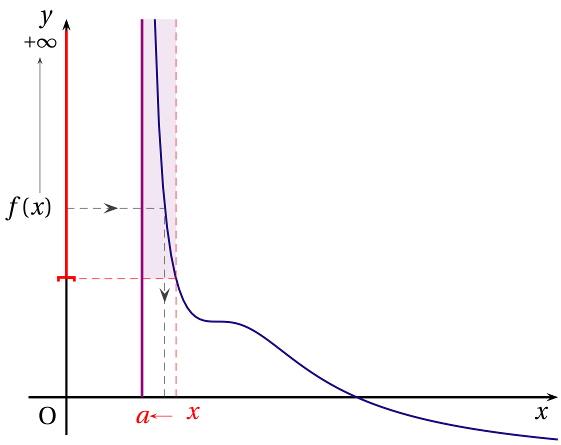
De même, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers a, si $f(x)$ peut prendre des valeurs **négatives** aussi grandes que l'on veut, pourvu que l'on choisisse x suffisamment proche de a.

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Si la fonction n'est définie qu'à gauche de a (resp. qu'à droite de a), on note de manière similaire :

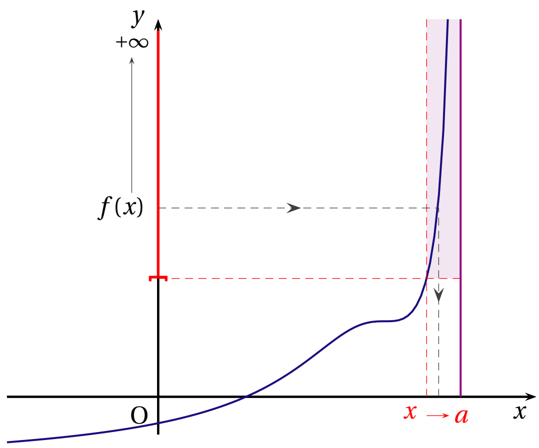
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad (\text{resp. } \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty)$$

Limite « à droite de a »

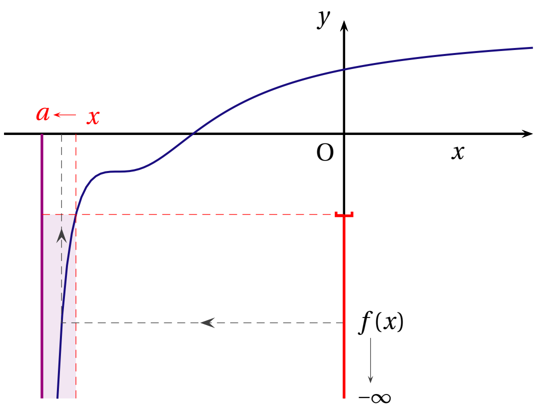


$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$$

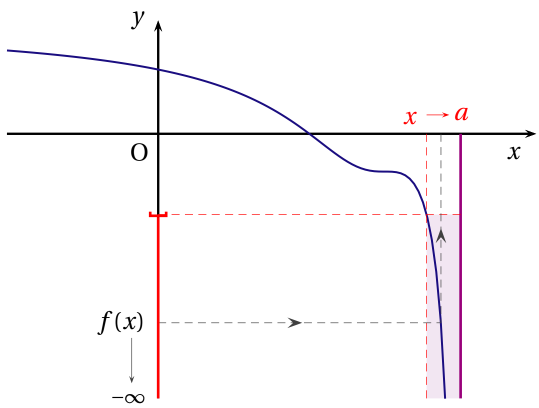
Limite « à gauche de a »



$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$$



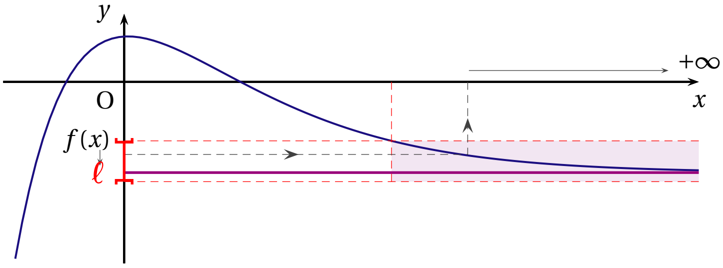
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$$

1.5. Limite finie en l'infini

Lorsqu'une fonction f est définie au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, on peut s'intéresser au comportement de $f(x)$ lorsque x devient très grand dans les positifs ou les négatifs. Soit $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f *admet* ℓ *pour limite en* $+\infty$ lorsque $f(x)$ devient aussi proche que l'on veut de ℓ pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand. On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Il en va de même pour définir $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.



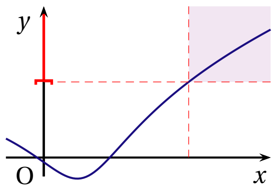
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$: $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à condition de choisir x suffisamment grand.

1.6. Limite infinie en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[A;+\infty[$, où A est un réel.

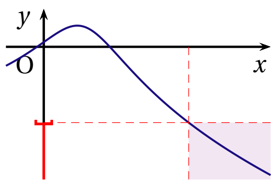
1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand.

   On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x suffisamment grand.

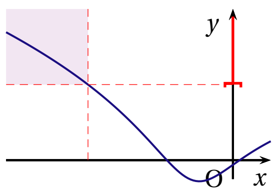
   On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;A]$, où A est un réel.

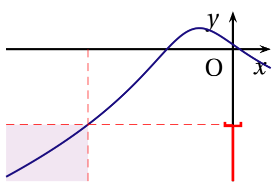
1. Dire que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs positives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x négatif suffisamment grand.

   On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



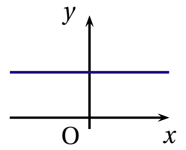
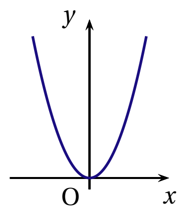
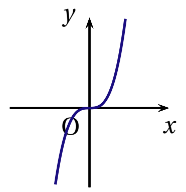
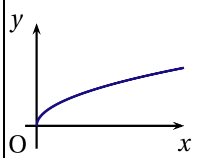
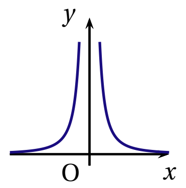
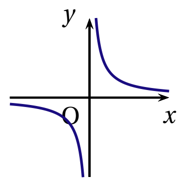
2. Dire que la fonction f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ signifie que $f(x)$ prend des valeurs négatives aussi grandes que l'on veut pourvu que l'on choisisse x négatif suffisamment grand.

   On note : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



2. Calculs de limites

2.1. Limites des fonctions usuelles

Fonction	Définie sur	Courbe	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
$x \longmapsto c$ $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		c	c	c
$x \longmapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$ pair	$\mathbb{R}$		$+\infty$	0	$+\infty$
$x \longmapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}$ impair	$\mathbb{R}$		$-\infty$	0	$+\infty$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$		NON DÉFINI	0	$+\infty$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ pair	$\mathbb{R}^*$		0^+	$\lim\limits_{x\to 0^-} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} = +\infty$	0^+
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}$ impair	$\mathbb{R}^*$		0^-	$\lim\limits_{x\to 0^-} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} = +\infty$	0^+

Exemple : On a :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0^-$

2.2. Opérations sur les limites

2.2.1 Limite d'une somme de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors par somme $\lim\limits_{x\to\alpha}(u+v)(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**À ÉTUDIER**

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x}$. Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2-1 & = & -1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\}$ donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2-1 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 \end{array}\right\}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2.2.2 Limite d'un produit de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors par produit $\lim\limits_{x\to\alpha}(u\times v)(x) =$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty^*$	$\pm\infty^*$	**À ÉTUDIER**

(*) Lorsque la limite du produit est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$. Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}-1 & = & +\infty \end{array}\right\}$ nous sommes en présence de la forme indéterminée « $0\times\infty$ ».

  Or pour tout réel x non nul, $x^2 \times \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = x - x^2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x - x^2 = 0$. Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}-1 & = & -1 \end{array}\right\}$ donc, par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

2.2.3 Limite d'un quotient de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) =$	$\ell' \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	ℓ'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors par quotient $\lim\limits_{x\to\alpha} \left(\frac{u}{v}\right)(x) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty^*$	0	$\pm\infty^*$	À ÉTUDIER	À ÉTUDIER

(*) Lorsque la limite du quotient est infinie, c'est la règle des signes du produit qui permet de déterminer le résultat $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Étudions les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 1^+} 1 & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-1 & = & 0^+ \end{array}\right\}$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} x^3-1 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2-1 & = & +\infty \end{array}\right\}$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2.2.4 Composition de limites

Théorème 1 : Composition de limites

Soient f et g deux fonctions et a, b et c des réels ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c, \qquad \text{alors } \lim_{x\to a} g\circ f(x) = c$$

Exemple : Calculons la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}} + 2$.

$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} & = & 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \sqrt{X} & = & 0 \end{array}\right\}$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}} = 0$.

Dès lors, par somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}} + 2 = 2$.

2.3. Limites de fonctions polynômes ou rationnelles en $\pm\infty$

Théorème 2 :

La limite d'une fonction polynôme en $\pm\infty$ est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3-2x^2+x-5 = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$

Théorème 3 :

La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur.

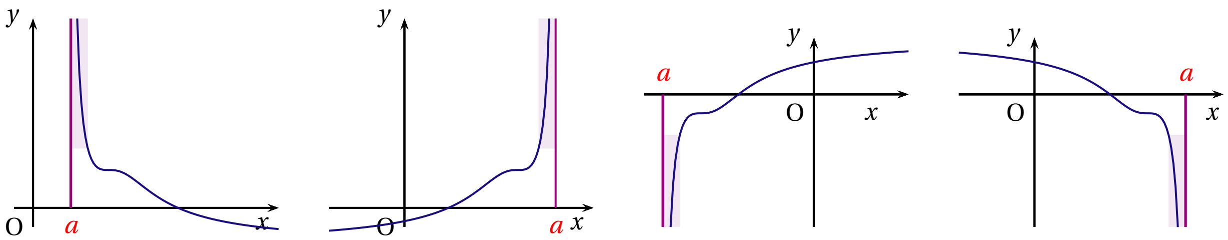
Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2-2x^3}{3x^4+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3}{3x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{3x} = 0$

3. Asymptotes et branches infinies

3.1. Asymptotes

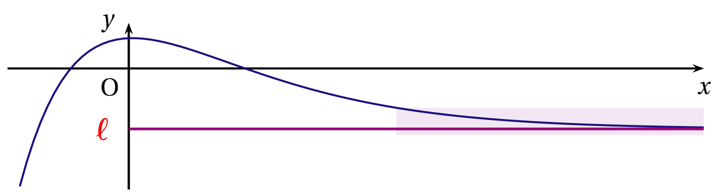
Définition 1 : Asymptote verticale

Soit a un réel. Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ et/ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$ en a.



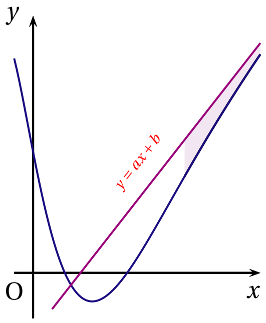
Définition 2 : Asymptote horizontale

Soit ℓ un réel. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (resp. si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$), alors la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

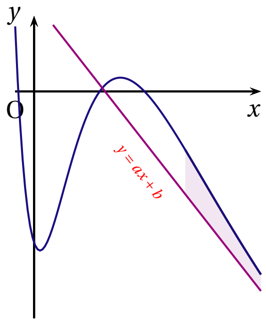


Définition 3 : Asymptote oblique

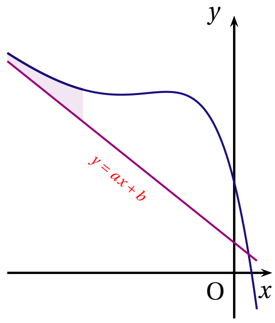
Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$, et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$), on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ (ou en $-\infty$).



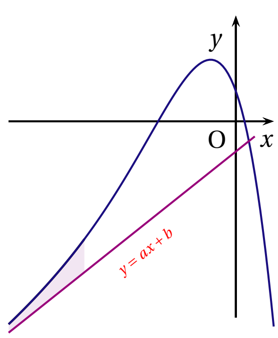
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2};+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x+3}$. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations de ses éventuelles asymptotes.

Commençons par étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$. D'après le théorème **3**, on a :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\quad\text{et de même}\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{2x+3}=\frac{5}{2}$$

Ainsi, la droite d'équation $y=\dfrac{5}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Étudions maintenant les limite en $-\dfrac{3}{2}$.

On a :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} 5x-1 &=& -\frac{17}{2}\\ \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}} 2x+3 &=& 0^-\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, }\lim_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}}\frac{5x-1}{2x+3}=+\infty.$$

Et de même,

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x>-\frac{3}{2}}} 5x-1 &=& -\frac{17}{2}\\ \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x>-\frac{3}{2}}} 2x+3 &=& 0^+\end{array}\right\}\text{donc, par quotient, }\lim_{\substack{x\to-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{3}{2}}}\frac{5x-1}{2x+3}=-\infty.$$

Ainsi, la droite d'équation $x=-\dfrac{3}{2}$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. Continuité

4.1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Intuitivement, dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou). Mathématiquement, cela se traduit de la manière suivante :

Définition 4 :

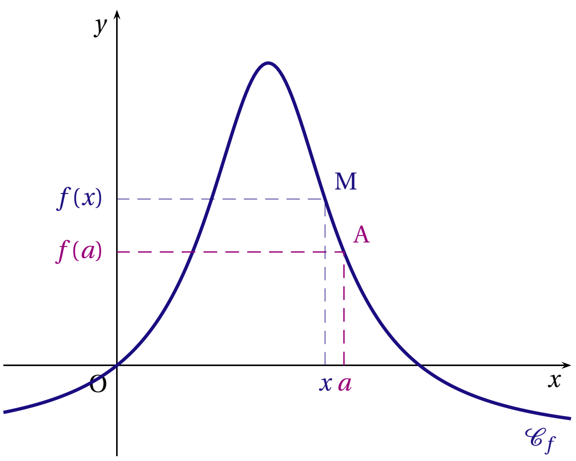
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I.

- f est dit **continue** en a lorsque

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

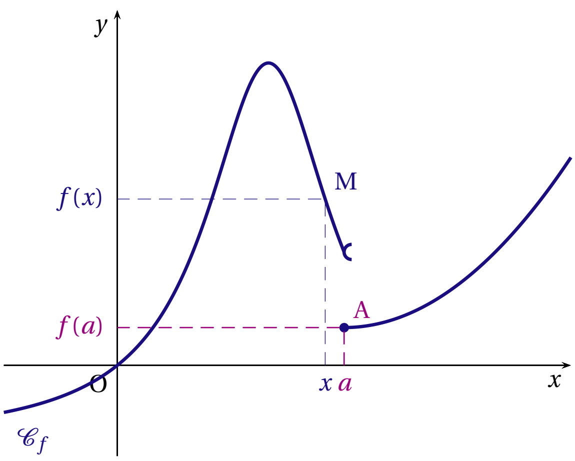
  Sinon, f est dite **discontinue** en a.
- f est dite **continue sur l'intervalle** I lorsqu'elle est continue en tout point $a \in$ I.

Exemple : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a. Pour tout réel x de l'intervalle I, on considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x



La fonction f est continue.

Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.



La fonction f n'est pas continue en a.

La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a.

Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

4.2. Opérations sur les fonctions continues

Théorème 4 :

- Si f et g sont deux fonctions continues, alors leur somme $f+g$ et leur produit fg sont continues. Si de plus, g ne s'annule pas, alors leur quotient $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue.
- Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Théorème 5 : Continuié des fonctions de référence

- Une fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- Une fraction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x}$.

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2 - 2x + 1$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Exercices

7.1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 3} 8x^2-2x+4$
2. $\lim\limits_{t\to 5} \dfrac{3t+2}{6t-4}$
3. $\lim\limits_{x\to 3} (2x-1)(8x-4)$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x-4)(x-7)$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x+2)(-6x+4)$

7.2 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{1}{x-7}$
2. $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-2}{-x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{-x+4}$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4}{x^4-7}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$

7.3 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x^3-2x^2+6x-1$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^4-8x^2+3}{7x^3-5x+4}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{8x^4-6x+7}{-5x^7-8x+4}$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^4-8x^2+7}{2x^2-3x^4+6x}$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^7+8x^3+5}{7x^3-8x+12}$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x^2-8x+2)(-8x^3-2x+7)$
7. $\lim\limits_{x\to 0^-} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}$

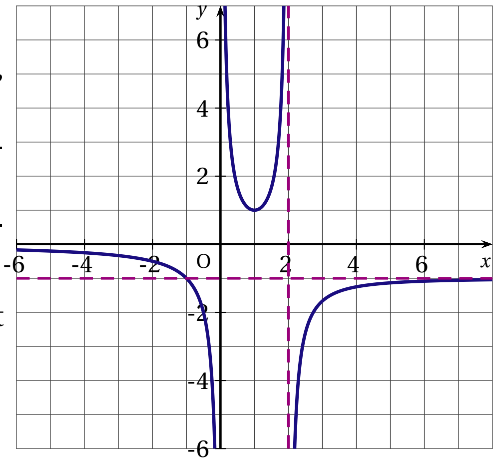
7.4 Calculer les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x+5}{x-2}}$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{\dfrac{4x+5}{x-2}}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}+x^3\right)^2$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-3\sqrt{\dfrac{1}{x}}+2\right)^2$

7.5 La courbe ci-contre, représentative d'une fonction f, admet les quatre asymptotes suivantes :

- deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y = -1$ et $y = 0$;
- deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$



7.6 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.

2. **a.** Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. La courbe C_f admet-elle des asymptotes ?

7.7

1. Soit $\mathrm{P}(x) = x^2 + x - 6$ et $\mathrm{Q}(x) = 2x^2 - 3x - 2$ deux polynômes.

a. Résoudre $\mathrm{P}(x) = 0$ et $\mathrm{Q}(x) = 0$.

b. En déduire une factorisation de $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{Q}(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$.

a. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes ?

7.8 Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 13x + 7}{4x - 2}$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$, qu'en déduit-on pour la courbe C_f ?

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

a. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{4x-2}$.

b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 3$.

7.9 Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dont le tableau de variation est donnée ci-dessous;

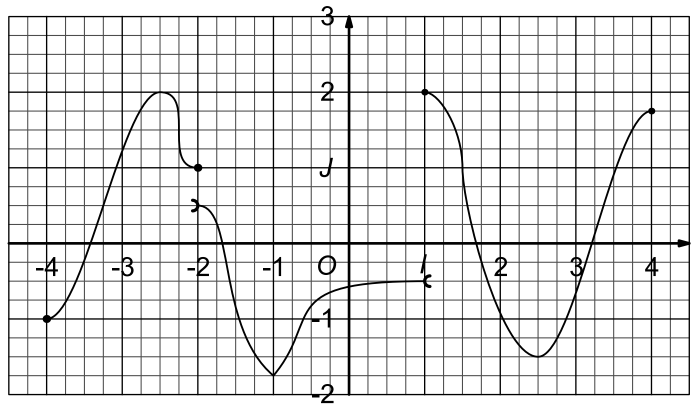
x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
Variations de f	5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	1

7.10 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x.
2. **a.** Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. La courbe C_f admet-elle des asymptotes?

7.11 Ci-dessous est donnée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f



Donner les intervalles sur lesquelles la fonction f est continue.

7.12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. La fonction f est-elle continue?

6. Corrigé des exercices

7.1

1. $\lim\limits_{x\to 3} 8x^2-2x+4 = 8\times 3^2-2\times 3+4 = 72-6+4 = 70$
2. $\lim\limits_{t\to 5} \dfrac{3t+2}{6t-4} = \dfrac{3\times 5+2}{6\times 5-4} = \dfrac{17}{26}$
3. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)(8x-4) = (2\times 3-1)(8\times 3-4) = 5\times 20 = 100$
4. On décompose :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} (3x-4) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+7) & = & +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par produit} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (3x-4)(x-7) = +\infty \end{array}$$

5. On décompose :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty} (3x+2) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-6x+4) & = & +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par produit} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (3x+2)(-6x+4) = -\infty \end{array}$$

7.2

1. On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 7^-} 1 & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to 7^-} x-7 & = & 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to 7^-} \dfrac{1}{x-7} = -\infty \end{array}$$

2. On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 3^+} -2 & = & -2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} -x+3 & = & 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-2}{-x+3} = +\infty \end{array}$$

3. On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x+4 & = & -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{-x+4} = 0^- \end{array}$$

4. On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty} -4 & = & -4 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^4-7 & = & +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4}{x^4-7} = 0^- \end{array}$$

5. On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 4 & = & 4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{x^2} & = & 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2} = 4 \end{array}$$

7.3

1. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^3-2x^2+6x-1=\lim_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$$

2. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-8x^2+3}{7x^3-5x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4}{7x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{7}=+\infty$$

3. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^4-6x+7}{-5x^7-8x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^4}{-5x^7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{-5x^3}=0^-$$

4. On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^4-8x^2+7}{2x^2-3x^4+6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^4}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}3x^2=+\infty$$

5. On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+8x^3+5}{7x^3-8x+12}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7}{7x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^4}{7}=-\infty$$

6. On décompose :

$$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-8x+2 &=& \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -8x^3-2x+7 &=& \lim\limits_{x\to-\infty} -8x^3=+\infty\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par produit}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2-8x+2)(-8x^3-2x+7)=+\infty\end{array}$$

7. On décompose :

$$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to0^-} 4 &=& 4\\ \lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} &=& -\infty\\ \lim\limits_{x\to0^-} \frac{-2}{x^2} &=& -\infty\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to+0^-} 4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}=-\infty\end{array}$$

8. En décomposant comme dans la question précédente, on obtient une forme indéterminée :

$$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to0^+} 4 &=& 4\\ \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} &=& +\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-2}{x^2} &=& -\infty\end{array}\right\}\text{FORME INDÉTERMINÉE}$$

Il faut donc réécrire l'expression dont on veut déterminer la limite, de manière à lever la forme indéterminée. Mettons l'ensemble au même dénominateur :

$$4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{4x^2+x-2}{x^2}$$

On décompose alors de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to0^+} 4x^2+x-2 &=& -2\\ \lim\limits_{x\to0^+} x^2 &=& 0^+\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par quotient}\\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4x^2+x-2}{x^2}=-\infty\end{array}$$

7.4

1. On a :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x}=\lim_{x\to+\infty}4=4$$
Or, $\lim\limits_{X\to 4}\sqrt{X}=\sqrt{4}=2$. Donc, par composition,
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x+5}{x-2}}=2$$

2. On commence par décomposer :
$$\left.\begin{array}{lcc}\lim\limits_{x\to 2^+} 4x+5 & = & 13\\ \lim\limits_{x\to 2^+} x-2 & = & 0^+\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par quotient}\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x+5}{x-2}=+\infty\end{array}$$
Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$. Donc, par composition,
$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{4x+5}{x-2}}=+\infty$$

3. Tout d'abord, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}\sqrt{X}=0^+$. Ainsi, par composition :
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}}=0^+$$
On a donc :
$$\left.\begin{array}{lcc}\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1}{x}} & = & 0^+\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 & = & +\infty\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}}+x^3=+\infty\end{array}$$
Enfin, $\lim\limits_{X\to+\infty}X^2=+\infty$. Donc, par composition,
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}}+x^3\right)^2=+\infty$$

4. Tout d'abord, on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$. Ainsi, par composition :
$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}=+\infty$$
On a donc :
$$\left.\begin{array}{lcc}\lim\limits_{x\to 0^+} -3\sqrt{\dfrac{1}{x}} & = & -\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 2 & = & 2\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{par somme}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}-3\sqrt{\dfrac{1}{x}}+2=-\infty\end{array}$$
Enfin, $\lim\limits_{X\to-\infty}X^2=+\infty$. Donc, par composition,
$$\lim_{x\to 0^+}\left(-3\sqrt{\frac{1}{x}}+2\right)^2=+\infty$$

7.5 Par lecture graphique, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = (-1)^-$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$$

7.6

1. On a $2-x=0 \iff x=2$, donc :

x	0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

2. a. On décompose :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to0^+} 2-x & = & 2 \\ \lim\limits_{x\to0^+} x^3 & = & 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par quotient}\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty\end{array}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = 0^-$$

b. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale en 0, ainsi qu'une asymptote horizontale en $+\infty$.

7.7

1. a. On commence par résoudre $\mathrm{P}(x)=0$. Calculons le discriminant de P : $\Delta = 1^2 - 4\times\times(-6) = 25$. L'équation admet donc deux racines, qui sont :

$$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

On résout de la même manière $\mathrm{Q}(x)=0$. On a : $\Delta = (-3)^2 - 4\times2\times(-2) = 25$. L'équation admet donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{3-5}{4} = \frac{-1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+5}{4} = 2$$

b. On a donc :

$$\mathrm{P}(x) = (x+3)(x-2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(x) = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$$

2. **a.** Tout d'abord remarquons que sur $]2;+\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \frac{(x+3)(x-2)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)} = \frac{x+3}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{x+3}{2x+1}$$

Dès lors, on a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 2^+} x+3 & = & 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 2x+1 & = & 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1 \end{array}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

7.8

1. On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} 2x^2-13x+7 & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} 4x-2 & = & 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote verticale en $x = \frac{1}{2}$.

2. **a.** On a :

$$\begin{aligned} f(x) = ax+b+\frac{c}{4x-2} &\iff \frac{2x^2-13x+7}{4x-2} = ax+b+\frac{c}{4x-2} \\ &\iff \frac{2x^2-13x+7}{4x-2} = \frac{(ax+b)(4x-2)+c}{4x-2} \\ &\iff \frac{2x^2-13x+7}{4x-2} = \frac{4ax^2-2ax+4bx-2b+c}{4x-2} \\ &\iff \frac{2x^2-13x+7}{4x-2} = \frac{4ax^2+(4b-2a)x+c-2b}{2x-2} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcr} 4a & = & 2 \\ 4b-2a & = & -13 \\ c-2b & = & 7 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcr} a & = & \frac{1}{2} \\ b & = & -3 \\ c & = & 1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

b. D'après la question précédente, on a :

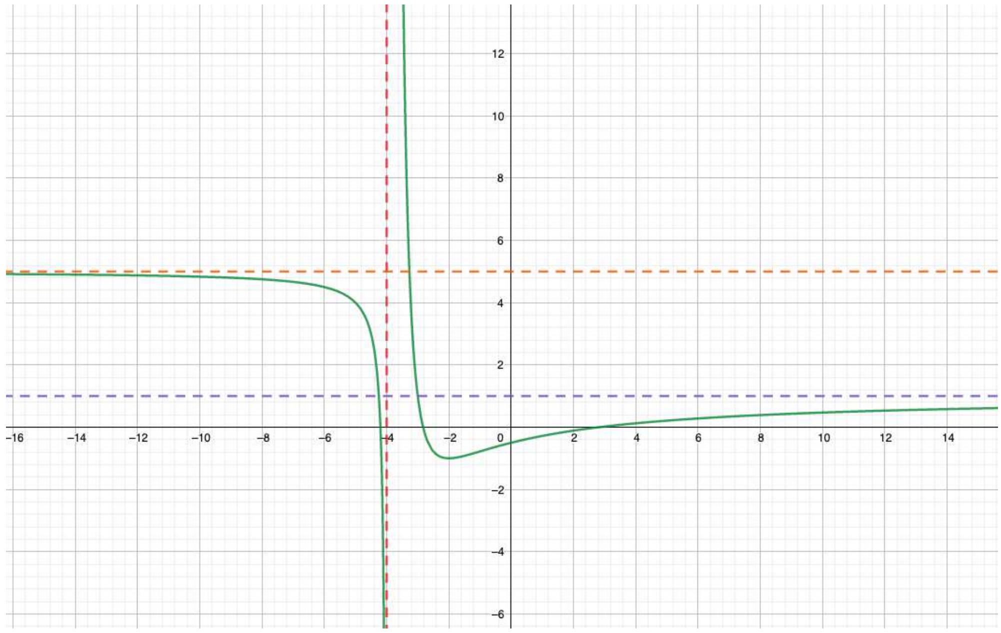
$$f(x) - y = \frac{x}{2} - 3 + \frac{1}{4x-2} - \left(\frac{x}{2} - 3\right) = \frac{1}{4x-2}$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4x-2} = 0^+$$

Donc, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet bien la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 3$ pour asymptote oblique.

7.9 La courbe suivante convient :



7.10

1. On a $2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ et $x + 1 = 0 \iff x = -1$ donc :

x	-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$x+1$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. **a.** On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to(-1)^+} 2x-1 & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} x+1 & = & 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par quotient} \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty \end{array}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

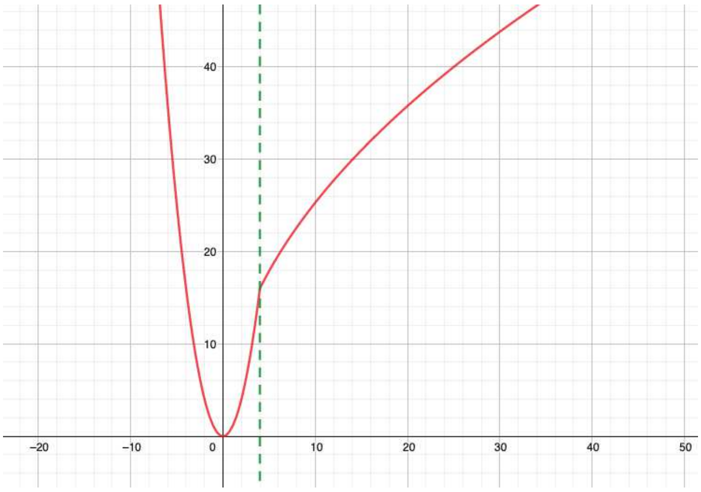
b. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote verticale en $x = -1$ et une asymptote horizontale en $+\infty$.

7.11 La fonction f est continue sur :

- $]-4;-1[$
- $]-2;1[$
- $]1;4[$

7.12

1. On a le graphe suivant :



2. On a $f(4) = 4^2 = 16$ et

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 8\sqrt{x} = 16$$

Donc, f est continue en 4. Par ailleurs, f est clairement continue sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$.
Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

---

7. Table des matières