Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 5

Probabilités élémentaires

Adrien Fontaine
Année scolaire 2019–2020

1. Le cadre probabiliste

Le but est ici de reprendre le vocabulaire des probabilités, vue en classe de terminale, et d'établir le lien avec une vision ensembliste.

1.1. Un peu de vocabulaire

Définition 1 : Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une éxpérience dont l'issue (ou résultat) ne peut être prévu. La répétition d'une telle expérience ne donne, a priori, pas le même résultat.

Exemple :

1. Jeter un dé à 6 faces et noter le résultat;
2. Lancer une pièce de monnaie et noter le résultat;
3. Lancer une copie du haut d'un escalier à 20 marches et obtenir la note de la copie.

Définition 2 : Univers

L'univers est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. Il est souvent noté Ω. Une issue est un élément $\omega \in \Omega$

Exemple :

1. $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1;6]\!]$;
2. $\Omega = \{pile; face\}$;
3. $\Omega = \{0;1;2;3;\ldots;18;19;20\} = [\![0;20]\!]$.

Définition 3 : Événement

Un **évènement** est un résultat possible d'une expérience aléatoire. Dans le cas ou l'univers Ω est fini, on peut associer de manière unique un évènement A à une partie (ou sous-ensemble) de Ω, que l'on note également A :

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ réalise } A\}.$$

Autrement dit, si $\omega \in \Omega$ est un résultat de l'expérience, alors ω réalise A, si et seulement si, $\omega \in A$.

Exemple :

1. "Obtenir un numéro impair". La partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{1;3;5\}$;
2. "Obtenir face". La partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{face\}$;
3. "Avoir la moyenne". La partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{10;11;\ldots;19;20\} = [\![10;20]\!]$;

1.2. Lien entre terminologie probabiliste et ensembliste

On effectue une expérience aléatoire. On note Ω l'univers. On considère A et B deux évènements liés à l'expérience aléatoire.

Définition 4 : Évènement élémentaire, certain, impossible

Un événement est dit
- **élémentaire** lorsque la partie associée est réduite à un élément (on parle de singleton) ;
- **certain** s'il est toujours réalisé (c'est alors Ω) ;
- **impossible** s'il n'est jamais réalisé (c'est alors $\emptyset$).

Exemple :

1. "Obtenir 5" est un évènement élémentaire, associé au singleton $\{5\}$.
2. "Obtenir pile ou face" est un évènement certain, associé à la partie Ω.
3. "Avoir une note négative" est un évènement impossible, associé à la partie $\emptyset$.

Définition 5 : Évènement contraire

Soit $\omega \in \Omega$. On dit que ω réalise **l'évènement contraire** de A, si et seulement si, ω ne réalise pas A. On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A. La partie $\overline{A}$ associée est la partie constitué de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. Autrement dit, $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exemple :

1. Soit A l'évènement "obtenir face". La partie associée est$A = \{face\}$. L'évènement contraire est $\overline{A}$: "obtenir pile". La partie associée est $\overline{A} = \{pile\}$.
2. Soit A l'évènement "obtenir un nombre pair". La partie associée est $A = \{2;4;6\}$. L'évènement contraire est $\overline{A}$: "obtenir un nombre impair". La partie associée est $\overline{A} = \{1;3;5\}$.
3. Soit A l'évènement "avoir une note supérieure ou égale à 12". La partie associée est $A = [\![12;20]\!]$. L'évènement contraire est $\overline{A}$: "avoir une note inférieure ou égale à 11". La partie associée est $\overline{A} = [\![0;11]\!]$.

Définition 6 :

On dit que l'évènement A **implique** l'évènement B si la réalisation de l'évènement A implique celle de l'évènement B. En terme ensembliste, cela signifie :

$$\text{A implique B} \iff A \subset B.$$

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à 6 faces deux fois de suite. Soit A l'évènement "faire un 6 au premier lancé" et B l'évenement "faire au moins un 6". Les parties associées sont :

$A = \{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6)\}$, $B = \{(6;1);(6;2);(6;3);(6;4);(6;5);(6;6);(1;6);(2;6);(3;6);(4;6$

Définition 7 :

On dit que l'évènement A **ou** B est réalisé, si et seulement si, au moins l'un des deux évènements A ou B est réalisé. La partie associée est $A \cup B$.

Exemple : On reprend l'expérience précédente. Soit A l'évènement "faire un 3 au premier lancé" et B l'évènement "faire un 5 au deuxième lancé". Les parties associées sont :

$$A = \{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6)\}, \quad B = \{(1;5);(2;5);(3;5);(4;5);(5;5);(6;5)\}.$$

L'évènement A ou B est "faire un 3 au premier lancé ou un 5 au deuxième lancé" et la partie associée est :

$$A \cup B = \{(3;1);(3;2);(3;3);(3;4);(3;5);(3;6);(1;5);(2;5);(4;5);(5;5);(6;5)\}.$$

Définition 8 :

On dit que l'évènement A **et** B est réalisé, si et seulement si, les deux évènements A et B sont réalisés. La partie associée est $A \cap B$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. L'évènement A et B est "faire un 3 au premier lancé et un 5 au deuxième lancé" et la partie associée est :

$$A \cap B = \{(3;5)\}$$

Définition 9 :

On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** si l'évènement A et B est impossible. Autrement dit, les évènements A et B sont incompatibles si les parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : On reprend l'expérience des exemples précédents. Soit A l'évènement "faire un 3 au premier lancé" et B l'évènement "faire un 5 au premier lancé".
On vérifie alors facilement que les deux parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$. Les évènements A et B sont donc incompatibles.

On récapitule toutes ces notions dans le tableau suivant :

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste	Notation
évènement certain	Ensemble entier	Ω
évènement impossible	Ensemble vide	$\emptyset$
évènement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}$
évènement A	Ensemble A	$A \subset \Omega$
évènement contraire de A	Complémentaire de A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
A ou B	A union B	$A \cup B$
A et B	A inter B	$A \cap B$
A et B incompatibles	A et B disjoints	$A \cap B = \emptyset$
ω réalise A	ω appartient à A	$\omega \in A$

2. Probabilités

Dans toute la suite, Ω désigne un ensemble fini et $\mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.

Définition 10 :

On appelle **probabilité** sur Ω, (ou loi de probabilité), tout application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longmapsto [0;1]$ vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. Pour tous évènements incompatibles A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A)$ s'appelle la probabilité de l'évènement A.

⚠ATTENTION !⚠

Une probabilité est par définition à valeurs dans $[0;1]$, ainsi, pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$$\boxed{0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1}$$

On vérifiera donc **systématiquement** que le résultat d'un calcul de probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

2.1. Propriétés de base

Proposition 1 :

Soient A, B deux évènements. Alors,

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.
4. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Preuve.

1. On a $\Omega = A \cup \overline{A}$ avec $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Donc, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$. D'où le résultat.
2. Il suffit d'appliquer le point précédent à $A = \Omega$.
3. Si $A \subset B$, alors $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$.
4. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$. D'ou, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.
5. On a $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$. De plus, $A \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset$, d'où $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$. On en déduit grâce au point précédent, la propriété énoncée.

□

Proposition 2 : Formule du crible de Poincaré

1. Si $A_1, \dots, A_k$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles, alors :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j).$$

2. Si A, B et C sont trois évènements quelconques, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = {} & \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)\\ & -\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)\\ & +\mathbb{P}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

3. Pour un nombre fini d'évènements, il suffit de suivre le schéma de la formule précédente :
   - à chaque ligne, on change de signe;
   - à chaque ligne, on considère des probabilités d'intersections regroupant un évènement de plus.

Exemple : Écrire la formule du crible pour 4 évènements.
On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B\cup C\cup D) = {} & \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(D)\\ & -\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(A\cap D)-\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(B\cap D)-\mathbb{P}(C\cap D)\\ & +\mathbb{P}(A\cap B\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C\cap D)+\mathbb{P}(A\cap C\cap D)+\mathbb{P}(A\cap B\cap D)\\ & -\mathbb{P}(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

2.2. Probabilités élémentaires

Théorème 1 :

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement. Si $A = \{\omega_1;\dots;\omega_n\}$, alors on a :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Exemple : Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $\mathbb{P}(\{4;5;6\})$.
Les nombres 1, 2, 3, 4, et 5 ayant la même probabilité de tomber, il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que

$$\forall k \in [\![1;5]\!], \qquad \mathbb{P}(\{k\}) = \lambda.$$

De plus, le 6 apparait deux fois plus souvent que les autres faces, donc $\mathbb{P}(\{6\}) = 2\lambda$. Par ailleurs, on a :

$$1 = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(\{k\}) = 5\lambda + 2\lambda = 7\lambda.$$

D'ou, $\lambda = \frac{1}{7}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(\{4;5;6\}) = \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \lambda + \lambda + 2\lambda = 4\lambda = \frac{4}{7}.$$

2.3. Le cas de l'équiprobabilité

Définition 11 : Équiprobabilité

Deux évènements A et B sont dis **équiprobables** si ils ont la même probabilité, c'est-à-dire si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$. On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

Remarque : Les situations d'équiprobabilité sont très nombreuses. Citons par exemple le lancer d'une pièce ou d'un dé équilibré, le tirage au hasard d'une boule dans une urne (on dit souvent "indiscernable au toucher" pour supposer l'équiprobabilité), d'une carte dans un jeu, d'une personne dans un échantillon, etc. Il faut cependant bien faire attention à ne pas voir de l'équiprobabilité dans toutes les situations!

Remarque culturelle : **Loto et équiprobabilité**
Le tirage du Loto est un exemple classique d'équiprobabilité : tous les nombres ont absolument la même chance d'être tirés. Par exemple, le tirage $\{1;2;3;4;5;6\}$ a la même probabilité de sortir que les autres, alors que peu de gens auraient l'idée de jouer ces 6 numéros. De quoi alimenter la célèbre maxime "le loto est un impôt sur les gens qui ne connaissent pas les probabilités"?

Théorème 2 :

On suppose que l'on est en situtation d'équiprobabilité. Alors :

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ où $n = card(\Omega)$.
2. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

Remarque : On appelle **cardinal** d'un ensemble fini E, son nombre d'éléments, et on le note $Card(E)$.

Exemple :

- $Card\,\{0;3;7\} = 3$;
- $Card\,\emptyset = 0$;
- $Card\,[\![1;n]\!] = n$;
- $Card\,[\![0;n]\!] = n+1$

3. Probabilités conditionnelles

3.1. Définitions et propriétés.

Définition 12 :

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A le nombre, noté $\mathbb{P}_A(B)$, défini par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Exemple : On lance un dé cubique équilibré. On considère les évènements suivants :

- A : « obtenir un nombre inférieur à 3 » ;
- B : « obtenir un 5 » ;
- C : « obtenir un 2 ».

Calculer $P_A(B)$ et $P_A(C)$ de deux façons différentes.

Première méthode : on a $A = \{1;2;3\}$, $B = \{5\}$ et $C = \{2\}$. Donc, $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap C = \{2\}$. Donc,

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}$$

Deuxième méthode : $\mathbb{P}_A(B)$ correspond à la probabilité d'obtenir un 5 **sachant** que l'on a obtenu un nombre inférieur à 3, ce qui est bien évidemment impossible. D'ou :

$$\mathbb{P}_A(B) = 0$$

Par ailleurs, $\mathbb{P}_A(C)$ correspond à la probabilité d'obtenir un 2 sachant que l'on a obtenu un nombre inférieur à 3. Puisqu'il y a 3 nombres inférieur ou égaux à 3, on a une chance sur 3 d'obtenir un 2. Donc,

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{1}{3}$$

Proposition 3 :

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_A & : & \mathscr{P}(\Omega) & \to & [0;1] \\ & & B & \mapsto & \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array},$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Remarque : En particulier, toutes les propriétés de la partie **3.1** s'appliquent à $B \mapsto \mathbb{P}_A(B)$.

3.2. Formule des probabilités composées

Si A et B sont deux évènements de probabilité non nulles, alors par définition de $P_A(B)$ et de $P_B(A)$, on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B).$$

On peut généraliser la formule précédente.

Proposition 4 : Formule des probabilités composées

Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque :

1. Dans le cas $n = 2$, on retrouve la formule

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(B).$$

2. Dans le cas $n = 3$, cela donne :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_{A \cap B}(C).$$

Exemple : Considérons une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire successivement 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage constitué de 3 boules blanches?

Notons A_i l'évènement "la i-ème boule tirée est blanche". Clairement, on a :

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$\mathbb{P}(A_2)$ est moins évident car on ne connaît pas la composition précise de l'urne lors du deuxième tirage. Cependant, le calcul de $\mathbb{P}_{A_1}(A_2)$ est facile :

$$\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Par la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}.$$

3.3. Formule des probabilités totales

Définition 13 : Système complet d'évènements

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements. On dit que $\{A_1, \dots, A_n\}$ est un **système complet d'évènements** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_j$.

Exemple :

- Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $\{A ; \overline{A}\}$ est un système complet d'évènements.
  On lance un dé à 6 faces. On note A l'évènement « obtenir un nombre pair » et B l'évènement « obtenir un nombre impair ». Les ensembles associés sont $A = \{2;4;6\}$ et $B = \{1;3;5\}$. Ainsi, $\{A, B\}$ forme un système complet d'évènements.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, alors $\{\{\omega_1\} ; \dots ; \{\omega_n\}\}$ est un système complet d'évènements.
  Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. Les évènements A_1 « obtenir un 1 », A_2 « obtenir un 2 », A_3 « obtenir un 3 » et A_4 « obtenir un 4 » forment un système complet d'évènements.

Théorème 3 : Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complets d'évènements. Alors, pour tout évènement $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k).$$

Si de plus, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k).$$

Exemple : Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tira sans remise et successivement 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?
Notons A_i l'évènement "la boule obtenue lors du i-ème tirage est noire". On introduit un système complet d'évènements en considérant les évènements :

$$B_1 := A_1 \cap A_2 \quad B_2 := A_1 \cap \overline{A_2}, \quad B_3 := \overline{A_1} \cap A_2, \quad B_4 := \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

Par la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A_3) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}_{B_k}(A_3)\mathbb{P}(B_k)$. On calcule facilement :

$$\mathbb{P}_{B_1}(A_3) = 0 \quad \mathbb{P}_{B_2}(A_3) = \mathbb{P}_{B_3}(A_3) = \frac{1}{8} \text{ avec } \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_3) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9},$$

et

$$\mathbb{P}_{B_4}(A_3) = \frac{2}{8} \text{ avec } \mathbb{P}(B_4) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9}.$$

Au final,

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

Théorème 4 : Formule de Bayes

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet d'évènements et soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement. On suppose que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ et que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$:

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)}.$$

Exemple : On utilise souvent la formule de Bayes dans le cas particulier suivant : soient A et B deux évènements. On suppose que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ et que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Le système $\{A; \overline{A}\}$ forme un système complet d'évènements et :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Exemple : Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99 % des malades mais aussi faussement positif chez 0,1 % des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif.
Quelle est sa probabilité d'être malade? Qu'en conclure?
Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a :

$$\mathbb{P}(M) = 10^{-4}, \quad \mathbb{P}_M(T) = 0,99, \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 10^{-3}.$$

Par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)\mathbb{P}(\overline{M}),$$

puis par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}_M(T)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)},$$

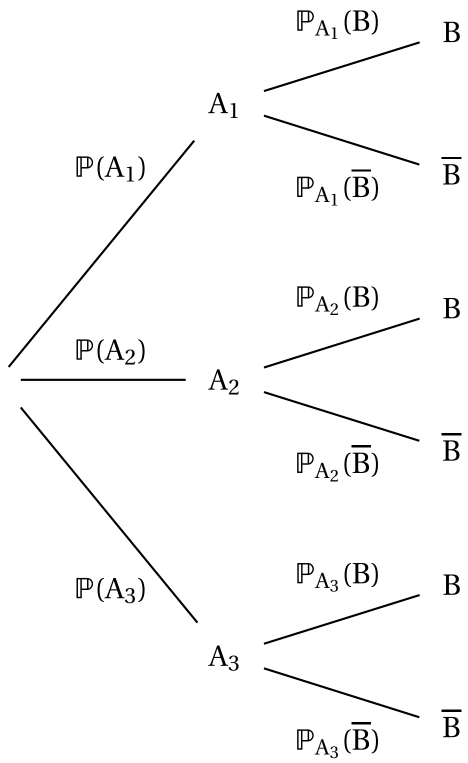
ce qui numériquement donne 9 %.
La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif! Cela s'explique par le fait que la population de malade est de 1/10000 et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de 1/1000.

3.4. Lien avec les arbres pondérés

Il est parfois pratique de représenter une situation de probabilités par un arbre pondéré et de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.
Considérons l'exemple ci-contre dont l'univers associé comporte six issues :

$$\Omega = \{A_1 \cap B; A_1 \cap \overline{B}; A_2 \cap B; A_2 \cap \overline{B}; A_3 \cap B; A_3 \cap \overline{B}\}.$$

Le but de ce paragraphe est d'illustrer les propriétés vues précédemment via un certain nombre de "règles" de calcul sur les arbres pondérés.



Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
Cette règle illustre notamment le fait que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple :

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 1,$$
$$\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}_{A_1}(\overline{B}) = 1 \text{ etc}.$$

Règle 2 : La probabilité de l'évènement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
Cette règle illustre la formule des probabilités composées. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B),$$
$$\mathbb{P}(A_2 \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(\overline{B}) \text{ etc}.$$

Règle 3 : La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet évènement.
Cette règle illustre la formule des probabilités totales. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple :

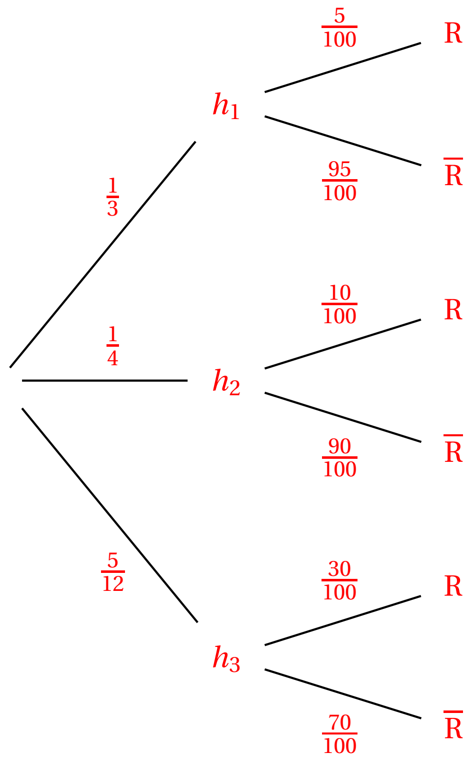
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_{A_1}(B)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}_{A_3}(B)\mathbb{P}(A_3).$$

Exemple : Un enseignant a beaucoup de mal à se réveiller le matin. Aussi, pour parer à toute éventualité, il programme son réveil à 3 horaires h_1, h_2 et h_3. Il se réveille à l'horaire h_1 avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et à l'horaire h_2 avec une probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_1, la probabilité qu'il arrive à l'heure en classe est de $\frac{95}{100}$. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_2, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de $\frac{10}{100}$. Enfin, lorsqu'il se réveille à l'horaire h_3, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de $\frac{30}{100}$. Quelle est la probabilité que l'enseignant soit en retard ?

Représentons la situation par un arbre pondéré. Notons R l'évènement "l'enseignant est en retard en classe" et H_i l'évènement "l'enseignant se réveille à l'horaire h_i pour $i \in \{1;2;3\}$". $\{H_1;H_2;H_3\}$ forme un système complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales (correspondant à la règle 3), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}_{H_i}(R)\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{100} + \frac{5}{12} \times \frac{30}{100}\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

L'enseignant arrive donc en retard avec une probabilité $\frac{1}{6}$.



Remarque : On peut toujours faire un arbre pondéré mais contrairement aux exigences du bac, il ne suffit plus pour la justification des calculs. Les règles énoncés ci-dessus ne sont finalement qu'une bonne représentation visuelle des propriétés énoncées précédemment.

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux évènements

Définition 14 :

Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux évènements. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque : Il est facile de voir que deux évènements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ ou de manière équivalente si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$. Autrement dit, deux évènements A et B sont indépendants si la donnée de l'information "A est réalisé" (resp. "B est réalisé") n'influe pas sur la réalisation de B (resp. A). On retrouve donc une notion intuitive d'indépendance.

Remarque culturelle : **Les probabilités et les préjugés des joueurs**
À la roulette, la boule s'arrête au hasard sur un numéro rouge ou un numéro noir. Dans des ouvrages sur la roulette, on lit que la plus longue "série" (c'est-à-dire suite de résultats de même couleur) que l'on ait observée a été de 24 rouges ou de 24 noirs. Beaucoup de joueurs, s'ils

observent un jour une série de 24 rouges n'hésitent pas à conclure que le noir doit forcément sortir au coup suivant "puisqu'il n'y a jamais eu de série de 25..." Mais comme l'écrivait le mathématicien Joseph Bertrand (1822-1900), "la roulette n'a ni conscience, ni mémoire..."
Alors, au Loto, les numéros les moins souvent obtenus lors des tirages précédents ont-ils plus de chances de sortir au tirage suivant ? Le hasard réserve bien des surprises : par exemple, le numéro 22 n'est sorti comme numéro complémentaire qu'après 344 tirages, c'est-à-dire plus de 6 ans après le premier tirage du Loto (le 19 mai 1976)...
Le "bon sens" devrait suffire à persuader les joueurs que les coups successifs de la roulette, comme les tirages successifs du Loto sont *indépendants les uns des autres...*

Exemple : On lance un dé cubique et on considère les évènements :

- A : « le résultat obtenu est inférieur ou égal à 2 » ;
- B : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 4 ».

Déterminer si A et B sont indépendants dans les deux cas suivants :

Cas 1 : dé équilibré.
On a $A = \{1;2\}$ et $B = \{4;5;6\}$, et donc $A \cap B = \emptyset$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \neq 0 = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Donc, les évènements A et B ne sont pas indépendants.

Cas 2 : dé pipé. On considère un dé qui permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1.
Puisque le dé permet d'obtenir 1 avec probabilité 1 alors la probabilité d'obtenir n'importe quel autre nombre est 0. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 1 \times 0 = 0 = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Donc, les évènements A et B sont indépendants.

Remarque : La notion d'indépendance dépend donc de la probabilité $\mathbb{P}$ étudiée.

4.2. Indépendance d'une famille d'évènements

Définition 15 :

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements. On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si :

$$\forall I \subset [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Exemple : Avec 4 évènements A_1, A_2, A_3 et A_4 : on dit que les évènements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont mutuellement indépendants lorsque l'on a les 11 égalités :

- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_4)$, $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$, $\mathbb{P}(A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_4)$, $\mathbb{P}(A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(A_4)$;
- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_4)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(A_4)$, $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(A_4)$;
- $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(A_4)$;

Exemple : On lance deux fois un dé équilibré et on considère les évènements suivants :

- A : « le premier chiffre est pair » ;
- B : « le second chiffre est impair » ;
- C : « la somme des chiffres est pair ».

Les évènements A, B et C sont-ils mutuellement indépendants ?

On a :

- $A = \{(2;1);(2;2);\cdots;(2;6);(4;1);(4;2);\cdots;(4;6);(6;1);(6;2);\cdots;(6;6)\}$
- $B = \{(1;1);(2;1);\cdots;(6;1);(3;1);(3;2);\cdots;(3;6);(5;1);(5;2);\cdots;(5;6)\}$
- $C = \{(1;1);(1;3);(1;5);(2;2);(2;4);(2;6);\cdots;(6;2);(6;4);(6;6)\}$

Donc,

- $A\cap B = \{(2;1);(2;3);(2;5);(4;1);(4;3);(4;5);(6;1);(6;3);(6;5)\}$
- $B\cap C = \{(1;1);(1;3);(1;5);(3;1);(3;3);(3;5);(5;1);(5;3);(5;5)\}$
- $A\cap C = \{(2;2);(2;4);(2;6);(4;2);(4;4);(4;6);(6;2);(6;4);(6;6)\}$
- $A\cap B\cap C = \emptyset$

Ainsi,

- $\mathbb{P}(A\cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(B\cap C) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C)$
- $\mathbb{P}(A\cap C) = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C)$
- MAIS $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0 \neq \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C)$

Les évènements A, B et C ne sont donc pas mutuellement indépendants.

Théorème 5 :

Soient $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements mutuellement indépendants. Soient $B_1,\dots,B_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements tels que $\forall i [\![1;n]\!]$, $B_i \in \{A_i\,;\overline{A_i}\}$. Alors, les évènements $B_1,\dots,B_n$ sont également mutuellement indépendants.

Exemple : Si A, B C sont mutuellement indépendants alors A, $\overline{B}$, C aussi, ou encore $\overline{A}$, B, C aussi, etc.

5. Exercices

Évènements et langage ensembliste

5.1 Soient A, B, C trois évènements. Exprimer en terme ensembliste les évènements suivants :

1. A et B sont réalisés.
2. Seulement A est réalisé.
3. Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.
4. Un seul des évènements A, B ou C est réalisé.
5. Au moins deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.
6. Pas plus de deux des trois évènements A, B ou C sont réalisés.

5.2 Soient A, B, C trois évènements.

1. Vérifier que $(A \cup B) \cap C$ entraîne $A \cup (B \cap C)$.
2. À quelle condition sur A et C les deux évènements précédents sont-ils égaux ?

5.3 On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les ensembles suivants :

- $A = \{$ les deux cartes tirées sont rouges $\}$.
- $B = \{$ les deux cartes tirées sont un valet et un dix $\}$.
- $C = \{$ les deux cartes tirées sont des personnages $\}$.

1. Que représente les ensembles suivants ?

   a. $\overline{A}$ **c.** $\left(A \cap \overline{C}\right) \cap \left(B \cap \overline{C}\right)$ **d.** $(A \cap B) \cap C$
   b. $A \cap B \cap \overline{C}$

2. Écrire à l'aide des ensembles A, B, C les ensembles :
   - $F = \{$ les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges $\}$,
   - $G = \{$ on obtient au plus une figure $\}$

5.4 Dans une boîte, il y a 4 jetons disponibles numérotés de 1 à 4. On tire simultanément au hasard deux jetons.

1. Donner tous les tirages possibles.
   Pour la suite, on note $A = \{$ les deux jetons sont pairs $\}$.
2. Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants : $\overline{A}$, "A ou $\overline{A}$", $A \cap \overline{A}$.
3. On considère l'ensemble $C = \{$ la somme des chiffres numérotés sur les deux jetons est paire$\}$.
   Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants :

$$\overline{C} \quad A \cup C, \quad \text{"A et C"}, \quad \text{"A ou } \overline{C}\text{"}, \quad A \cap \overline{C}.$$

5.5 Une épreuve aléatoire consiste à effectuer des lancers successifs d'un dé. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, A_k désigne l'évènement : « le k-ième lancer a fourni un 6 ».
Exprimer les évènements ci-dessous à l'aide des évènements A_k et des opérations autorisées sur les évènements.

1. - E_2 : « Le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer » ;
   - E_5 : « Le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer » ;
   - E_n : « Le premier 6 a été obtenu au n-ième lancer » où n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
2. - G_3 : « Le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer » ;
   - G_4 : « Le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer ».

Calculs directs de probabilités

5.6 On extrait 3 cartes d'un jeu de 32 cartes, une par une, avec remise.

1. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 valets ?
2. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 3 fois la même carte ?

5.7 On extrait n boules d'une urne contenant une boule noire et une boule blanche, une par une, avec remise. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des boules tirées soit blanche ?

5.8 On lance un dé équilibré deux fois de suite.

1. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?
2. Il y a 11 sommes possibles (tous les entiers entre 2 et 12). Pourquoi la probabilité calculée à la première question n'est-elle pas tout simplement égale à $\dfrac{1}{11}$?

Probabilités conditionnelles

5.9 Soient A, B, C trois eévènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Vérifier que
$$\mathbb{P}_{B\cap C}(A)\mathbb{P}_C(B) = \mathbb{P}_C(A \cap B)\,.$$

5.10 Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage ?
2. Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

5.11 On considère deux évènements A et B tels que
$$\mathbb{P}(A) = 0,2\,, \quad \mathbb{P}(B) = 0,6\,, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = 0,7$$

1. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. En déduire les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.

Formules des probabilités composées et totales

5.12 Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires.
On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

5.13 On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles. La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 remplit la bouteille de lait et la machine M_2 met le bouchon. Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5% des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8% n'ont pas de bouchon. D'autre part, 4% des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon. On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note :

- R l'évènement : « la bouteille est correctement remplie » ;
- B l'évènement : « la bouteille a un bouchon ».

1. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(R)$, $\mathbb{P}(\overline{R})$, $\mathbb{P}_R(B)$, $\mathbb{P}_R(\overline{B})$, $\mathbb{P}_{\overline{R}}(\overline{B})$ et $\mathbb{P}_{\overline{R}}(B)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
3. Calculer la probabilité qu'une bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon.

5.14 Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes. On sait que :

- 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80% contiennent des pommes de varités différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'évènement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'évènement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».
On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(\overline{E})$, $\mathbb{P}_E(V)$, $\mathbb{P}_E(\overline{V})$, $\mathbb{P}_{\overline{E}}(\overline{V})$ et $\mathbb{P}_{\overline{E}}(V)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(V)$.
3. On constate que le sac de pommes contient des pommes de variétés diffétentes. Calculer la probabilité qu'il ait été acheté dans un supermarché.

5.15 Dans un magasin de CD, 5 % des boîtes sont en mauvais état, 60 % des boîtes abîmées contiennent un CD défectueux, et 98 % des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état. Un client achète un CD. On note A l'évènement "la boîte achetée est abîmée" et D l'évènement "le CD acheté est défectueux".

1. Donner les valeurs de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}_A(D)$, $\mathbb{P}_A(\overline{D})$, $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{D})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(D)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(D)$.
3. Le client constate que son CD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abimée?

5.16 Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- s'il a arrêté le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le $n+1$-ième est $0,8$;
- s'il a laissé passer le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est $0,6$;
- la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est $0,7$.

On note A_n l'évènement « le gardien arrête le n-ième tir ». On a donc $\mathbb{P}(A_1) = 0,7$.

1. **a.** Donner, pour $n \geqslant 1$, les valeurs de $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.

   b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = 0,2\mathbb{P}(A_n) + 0,6$$

2. On pose à présent, pour $n \geqslant 1$, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $u_n = p_n - 0,75$.

   a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $0,2$.

   b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

5.17 **Première partie :**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{3}{10}u_n$ et par la condition initiale $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = 13u_n - 4$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{4}{13} + \frac{5}{26}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

Deuxième partie

Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de kholle. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement : « le professeur oublie ses clés le jour n » et $p_n = \mathbb{P}(E_n)$. On suppose qu'il oublie ses clés le premier jour avec une probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose en outre que :

- s'il oublie ses clés le jour n, alors il oublie ses clés le jour $n+1$ avec une probabilité $\frac{1}{10}$;
- s'il n'oublie pas ses clés le jour n, alors il oublie ses clés le jour $n+1$ avec une probabilité $\frac{4}{10}$.

1. Donner les valeurs des probabilités :

$$\mathbb{P}_{E_n}(E_{n+1}) \qquad \mathbb{P}_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$$

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}p_n$$

3. À l'aide des résultats de la **Première partie**, donner l'expression de p_n en fonction de n.

5.18 Soit $a \in]0; \frac{1}{2}[$. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Le premier jour, le titre est stable. Si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $1-2a$, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité a.
Si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité $1-2a$ et baissera avec la probabilité a.
Si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$ il montera avec la probabilité a, restera stable avec la probabilité a et baissera avec la probabilité $1-2a$.
On note M_n (resp. S_n, resp. B_n) l'évènement "le titre monte (resp. reste stable, resp. baisse) le jour n".
On pose $p_n = \mathbb{P}(M_n)$, $q_n = \mathbb{P}(S_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Expliciter p_{n+1} et q_{n+1}, en fonction de p_n, q_n et r_n.
2. Que vaut $p_n + q_n + r_n$? En déduire l'expression de r_n en fonction de p_n et q_n.
3. Montrer que les suites p et q sont arithmético-géométrique.
4. En déduire p_n, q_n puis r_n en fonction de n.

5.19 Les poules pondent des œufs que l'on classe suivant trois calibres A,B, C.

- Si une poule pond un œuf de calibre A, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$.
- Si une poule pond un œuf de calibre B, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.
- Si une poule pond un œuf de calibre C, l'œuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B, ou C avec des probabilités respectives $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n, b_n et c_n les probabilités respectives pour que le n-ième œuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C.

1. On suppose que le premier œuf pondu par une poule est de calibre C. Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, et c_2.
2. Calculer les probabilités suivantes :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}),\ \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}),\ \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}),\\ &\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}),\ \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}),\ \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}),\\ &\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}),\ \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}),\ \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\end{aligned}$$

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{n+1} & = & \frac{1}{2} & a_n & + & \frac{1}{4} & b_n & + & \frac{1}{4} & c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{4} & a_n & + & \frac{1}{2} & b_n & + & \frac{1}{4} & c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4} & a_n & + & \frac{1}{4} & b_n & + & \frac{1}{2} & c_n \end{array}\right.$$

5.20 On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1"). Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A, B et C.
On considère en outre que :

- si M a choisi le dessert A la semaine n, alors la semaine $n+1$ il choisit le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$;
- si M a choisi le dessert B la semaine n, alors la semaine $n+1$ il choisit le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$:
- si M a choisi le dessert C la semaine n, il reprend le dessert C la semaine $n+1$;
- le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera pour tout entier naturel non nul n :

- A_n l'évènement : "M a choisi le dessert A la n-ième semaine " ;
- B_n l'évènement : "M a choisi le dessert B la n-ième semaine " ;
- C_n l'évènement : "M a choisi le dessert C la n-ième semaine " ;

1. Donner $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(C_1)$ ainsi que les probabilités :
$$\begin{array}{lll} \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}), & \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}), & \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}), \\ \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}), & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}), & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}), \\ \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}), & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}), & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}). \end{array}$$
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que :
$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n).$$
Donner de même des relations exprimant $\mathbb{P}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}(C_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(C_n)$.

Indépendance

5.21 On lance un dé à six faces parfaitement équilibré. Justifier l'indépendance des évènements A " on obtient le tirage 2, 4 ou 6" et B " on obtient le tirage 3 ou 6 " .

5.22 Dans une population de 10 000 personnes, il y a 45% de fumeurs et 35% de personnes atteintes de bronchite. De plus, 65% des personnes ayant une bronchite sont fumeurs.

1. On choisit une personne au hasard dans cette population. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - E_1 : « la personne choisie fume et a une bronchite » ;
   - E_2 : « la personne choisie ne fume pas et a une bronchite » ;
   - E_3 : « la personne choisie ne fume pas et n'a pas de bronchite ».
2. Fumer et avoir une bronchite sont-ils des évènements indépendants ?
3. On choisit une personne au hasard parmi les fumeurs. Calculer la probabilité que cette personne ait une bronchite.

5.23 Dans une ville comprenant deux arrondissements A et B, la probabilité pour une entreprise de faire l'objet d'un contrôle fiscal est de $\frac{1}{4}$ dans l'arrondissement A et de $\frac{1}{5}$ dans l'arrondissement B. On suppose que ces deux évènements sont indépendants. Un groupe financier possède un hypermarché implanté dans l'arrondissement A et un autre dans l'arrondissement B.
Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

- E_1 : « les deux hypermarchés sont contrôlés » ;
- E_2 : « l'un au moins des hypermarchés est contrôlés » ;
- E_3 : « un hypermarché et un seul est contrôlé » ;
- E_4 : « aucun des deux hypermarchés n'est contrôlé »

5.24 Un archer tire sur une cible située à 20m et une cible située à 50m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20m (resp. 50m) est $\frac{1}{3}$ (resp. $\frac{1}{4}$). On suppose que les trois tirs sont indépendants. L'archer gagne s'il atteint deux cibles consécutivement.
Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20m et en commençant par la cible située à 50m. Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

6. Corrigé des exercices

5.1

1. $A \cap B$
2. $A \cap \overline{B}$
3. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
4. $\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$
5. $(A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$
6. $\overline{A \cap B \cap C}$

5.2

1. En développant,
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C)$$
2. On a égalité, si $A \cap C = A$, *i.e* si $A \subset C$.
Réciproquement, si $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$, alors
$$A \subset A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \subset C$$

5.3

1. **a.** $\overline{A}$ « Une des deux cartes tirées n'est pas rouge »
   b. $A \cap B \cap \overline{C}$ « Les deux cartes tirées sont un valet et un dix rouge »
   c. $\left(A \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$ cf question **b.**
   d. $A \cap B \cap C = \varnothing$ évènement impossible
2. **a.** $F = \overline{A} \cap C$
   b. $G = \overline{C}$

5.4

1. $\Omega = \{(1;2);(1;3);(1;4);(2;3);(2;4);(3;4)\}$
On a $A = \{(2;4)\}$.
2. $\overline{A} = \{(1;2);(1;3);(1;4);(2;3);(3;4)\}$
A ou $\overline{A} = A \cup \overline{A} = \Omega$
$A \cap \overline{A} = \varnothing$

3. $C = \{(1;3);(2;4)\}$
$\overline{C} = \{(1;2);(1;4);(2;3);(3;4)\}$
$A \cup C = \{(1;3);(2;4)\}$
« A et C » : $A \cap C = \{(2;4)\}$
« A ou $\overline{C}$ » : $A \cup \overline{C} = \{(1;2);(1;4);(2;3);(2;4);(3;4)\}$
$A \cap \overline{C} = \emptyset$

5.5

1. On a :
   - $E_2 = \overline{A_1} \cap A_2$
   - $E_5 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5$
   - $E_n = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$
2. On a :
   - $G_3 = \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right)$
   - $G_4 = \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4\right)$

5.6

1. Il y a au total 4 valets dans le jeu de 32 cartes. On a donc une probabilité de $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ de tirer un valet. Les trois tirages s'effectuant avec remise, on a donc une probabilité $\left(\frac{1}{8}\right)^3$ d'obtenir 3 valets.
2. Pour une carte donnée, la probabilité d'obtenir cette carte trois fois de suite est $\left(\frac{1}{32}\right)^3$. Si l'on prend en compte l'ensemble des 32 cartes du paquet, on a donc une probabilité de $32 \times \left(\frac{1}{32}\right)^3 = \left(\frac{1}{32}\right)^2$ d'obtenir trois fois la même carte.

5.7 L'évènement contraire de A : « au moins une des boules tirées est blanche » est $\overline{A}$: « toutes les boules tirées sont noires ».
On a :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5.8

1. L'univers Ω est donné par :

$$\Omega = \{(1;1);(1;2);\cdots;(1;6);(2;1);(2;2);\cdots;(2;6);\cdots;(6;1);(6;2);\cdots;(6;6)\}$$

On a $Card(\Omega) = 36$.
Par ailleurs, notons A lévènement « la somme des numéros est égale à 8 ». On a :

$$A = \{(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)\}$$

et donc $Card(A) = 5$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36}$$

2. Les 11 sommes possibles ne sont pas toutes équiprobables. Par exemple, la somme des deux dés ne vaut 2 que dans le cas où l'on a obtenu $(1;1)$ (on a donc une probabilité $\frac{1}{36}$) alors que la somme des deux dés vaut 8 dans 5 cas différents (avec une probabilité de $\frac{5}{36}$ donc).

5.9 On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{B\cap C}(A)\times\mathbb{P}_C(B) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(B\cap C)}\times\frac{\mathbb{P}(B\cap C)}{\mathbb{P}(C)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(C)}\\ &= \mathbb{P}_C(A\cap B)\end{aligned}$$

5.10

1. Notons A l'évènement « il y a au moins une boule noire ». Alors, $\overline{A}$ est l'évènement « il n'y a aucune boule noire ». Donc,

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8} = \frac{7}{15}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A) = 1-\frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

2. Notons N_1 l'évènement « la première boule tirée est noire » et N l'évènement « il y a une boule noire dans le tirage ». Alors $N_1 \subset N$ donc $N_1 \cap N = N_1$. Ainsi,

$$\mathbb{P}_N(N_1) = \frac{\mathbb{P}(N_1\cap N)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\mathbb{P}(N_1)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}$$

5.11

1. On sait que :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
Donc,
$$0,7 = 0,2 + 0,6 - \mathbb{P}(A \cap B)$$
Donc,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2 + 0,6 - 0,7 = 0,1$$
2. On a alors :
$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}$$

5.12 Notons A_i l'évènement "la boule obtenue lors du i-ème tirage est noire". On introduit un système complet d'évènements en considérant les évènements :
$$B_1 := A_1 \cap A_2 \quad B_2 := A_1 \cap \overline{A_2}, \quad B_3 := \overline{A_1} \cap A_2, \quad B_4 := \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$
Par la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A_3) = \sum_{k=1}^{4} \mathbb{P}_{B_k}(A_3)\mathbb{P}(B_k)$. On calcule facilement :
$$\mathbb{P}_{B_1}(A_3) = 0 \quad \mathbb{P}_{B_2}(A_3) = \mathbb{P}_{B_3}(A_3) = \frac{1}{8} \text{ avec } \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_3) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9},$$
et
$$\mathbb{P}_{B_4}(A_3) = \frac{2}{8} \text{ avec } \mathbb{P}(B_4) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9}.$$
Au final,
$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

5.13

1. D'après l'énoncé, on a :
$$\mathbb{P}(R) = \frac{95}{100} \quad \mathbb{P}(\overline{R}) = \frac{5}{100} \quad \mathbb{P}_R(B) = \frac{96}{100} \quad \mathbb{P}_R(\overline{B}) = \frac{4}{100} \quad \mathbb{P}_{\overline{R}}(\overline{B}) = \frac{8}{100} \quad \mathbb{P}_{\overline{R}}(B) = \frac{92}{100}$$
2. D'après la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(B) + \mathbb{P}(\overline{R}) \times \mathbb{P}_{\overline{R}}(B)\\ &= \frac{95}{100} \times \frac{96}{100} + \frac{5}{100} \times \frac{92}{100}\\ &= \frac{912}{1000} + \frac{46}{1000}\\ &= \frac{958}{1000} = 0,958\end{aligned}$$

3. D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(R \cap B) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(B) = \frac{95}{100} \times \frac{96}{100} = \frac{912}{1000}$$

5.14

1. D'après l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{15}{100} \quad \mathbb{P}(\overline{E}) = \frac{85}{100} \quad \mathbb{P}_E(V) = \frac{80}{100} \quad \mathbb{P}_E(\overline{V}) = \frac{20}{100} \quad \mathbb{P}_{\overline{E}}(\overline{V}) = \frac{90}{100} \quad \mathbb{P}_{\overline{E}}(V) = \frac{10}{100}$$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(V) + \mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(V)\\ &= \frac{15}{100} \times \frac{80}{100} + \frac{85}{100} \times \frac{10}{100}\\ &= \frac{12}{100} + \frac{85}{1000}\\ &= \frac{205}{1000}\end{aligned}$$

3. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\mathbb{P}_V(\overline{E}) = \frac{\mathbb{P}(V \cap \overline{E}}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\frac{85}{1000}}{\frac{205}{1000}} = \frac{85}{205} = \frac{17}{41}$$

5.15

1. D'après l'énoncé,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{100} \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{95}{100} \quad \mathbb{P}_A(D) = \frac{60}{100} \quad \mathbb{P}_A(\overline{D}) = \frac{40}{100} \quad \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{D}) = \frac{98}{100} \quad \mathbb{P}_{\overline{A}}(D) = \frac{2}{100}$$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(D)\\ &= \frac{5}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{95}{100} \times \frac{2}{100}\\ &= \frac{3}{100} + \frac{19}{1000}\\ &= \frac{49}{1000}\end{aligned}$$

3. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\mathbb{P}_D(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{49}{1000}} = \frac{30}{49}$$

5.16

1. **a.** D'après l'énoncé,

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0,8 \qquad \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0,6$$

b. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\\ &= \mathbb{P}(A_n) \times 0,8 + (1 - \mathbb{P}(A_n)) \times 0,6\\ &= 0,8\mathbb{P}(A_n) + 0,6 - 0,6\mathbb{P}(A_n)\\ &= 0,2\mathbb{P}(A_n) + 0,6\end{aligned}$$

2. **a.** On a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,75\\ &= 0,2p_n + 0,6 - 0,75\\ &= 0,2(u_n + 0,75) - 0,15\\ &= 0,2u_n + 0,15 - 0,15\\ &= 0,2u_n\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc bien une suite géométrique de raison $0,2$.

b. La suite (u_n) étant géométrique de raison $0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,75 = 0,7 - 0,75 = -0,05$, on a :

$$u_n = u_1 \times (0,2)^{n-1} = -0,05 \times (0,2)^{n-1}$$

Et donc,

$$p_n = u_n + 0,75 = -0,05 \times (0,2)^{n-1} + 0,75$$

5.17 **Première partie**

1. On a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= 13u_{n+1} - 4\\ &= 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4\\ &= \frac{52}{10} - \frac{39}{10}u_n - 4\\ &= \frac{52}{10} - \frac{39}{10}\left(\frac{1}{13}v_n + \frac{4}{13}\right) - 4\\ &= \frac{52}{10} - \frac{3}{10}v_n - \frac{12}{10} - 4\\ &= \frac{52}{10} - \frac{3}{10}v_n - \frac{12}{10} - \frac{40}{10}\\ &= -\frac{3}{10}v_n\end{aligned}$$

Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{10}$ et de premier terme,

$$v_1 = 13u_1 - 4 = 13 \times \frac{1}{2} - 4 = \frac{5}{2}$$

2. Puisque (v_n) est géométrique, on a :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

3. On a alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{13} v_n + \frac{4}{13} \\ &= \frac{1}{13} \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13} \\ &= \frac{4}{13} + \frac{5}{26}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Deuxième partie

1. D'après l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{E}_{n+1}) = \frac{1}{10} \qquad \mathbb{P}_{\overline{\mathrm{E}_n}}(\mathrm{E}_{n+1}) = \frac{4}{10}$$

2. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(\mathrm{E}_{n+1}) &= \mathbb{P}(\mathrm{E}_n) \times \mathbb{P}_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{E}_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{E}_n} \times \mathbb{P}_{\overline{\mathrm{E}_n}}(\mathrm{E}_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{10} + (1 - p_n) \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{4}{10} - \frac{3}{10} p_n \end{aligned}$$

3. La suite (p_n) satisfait à la même relation de récurrence que la suite (u_n) étudiée dans la partie I. Par ailleurs, on a $u_1 = p_1 = \dfrac{1}{2}$. Donc, pour tout n, on a :

$$p_n = u_n = \frac{4}{13} + \frac{5}{26}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

5.18

1. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{M}_{n+1}) = \mathbb{P}_{\mathrm{M}_n}(\mathrm{M}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{M}_n) + \mathbb{P}_{\mathrm{S}_n}(\mathrm{M}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{S}_n) + \mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{M}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) \\ &= (1 - 2a) p_n + a q_n + a r_n \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1}) = \mathbb{P}_{\mathrm{M}_n}(\mathrm{S}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{M}_n) + \mathbb{P}_{\mathrm{S}_n}(\mathrm{S}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{S}_n) + \mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{S}_{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathrm{B}_n) \\ &= a p_n + (1 - 2a) q_n + a r_n \end{aligned}$$

2. M_n, S_n et R_n forment un système complet d'évènements donc

$$\mathbb{P}(M_n)+\mathbb{P}(S_n)+\mathbb{P}(B_n)=1$$

i.e

$$p_n+q_n+r_n=1$$

Donc,

$$r_n=1-(p_n+q_n)$$

3. On remplace r_n dans les expressions de la question **1**,

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=(1-2a)p_n+aq_n+a(1-p_n-q_n)\\&=(1-2a-a)p_n+(a-a)q_n+a\\&=(1-3a)p_n+a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{n+1}&=ap_n+(1-2a)q_n+a(1-p_n-q_n)\\&=(1-3a)q_n+a\end{aligned}$$

Donc, (p_n) et (q_n) sont bien des suites arithmético-géométriques.

4. On a alors :

$$\begin{aligned}p_n&=(1-3a)^n\left(p_o-\frac{a}{1-(1-3a)}\right)+\frac{a}{1-(1-3a)}\\&=(1-3a)^n\left(p_0-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

et

$$q_n=(1-3a)^n\left(q_0-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$$

Or, le premier jour, le titre reste stable, donc

$$q_0=1 \qquad \text{et} \qquad p_0=0$$

Ainsi,

$$p_n=-(1-3a)^n\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^n\right)$$

$$q_n=\frac{1}{3}\left(1+2(1-3a)^n\right)$$

et

$$\begin{aligned}r_n&=1-p_n-q_n\\&=\frac{1}{3}\left(3-1+(1-3a)^n-1-2(1-3a)^n\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1-(1-3a)^n\right)\end{aligned}$$

5.19

1. Le premier oeuf pondu étant de calibre C, on a :

$$a_1 = b_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad c_1 = 1$$

Et d'après l'énoncé,

$$a_2 = b_2 = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \frac{1}{2}$$

2. D'après l'enoncé,

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} & \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4} & \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} & \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} & \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} & \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4} & \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}
\end{array}$$

3. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_n)
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_n)
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

Et,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n) \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_n)
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

5.20

1. Puisque le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine, on a :
$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{3}$$
Par ailleurs, $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ correspond à la probabilité de l'évènement A_{n+1} sachant que A_n est réalisé. Autrement dit, cela correspond à la probabilité que M choisisse le dessert A la semaine $n+1$ sachant qu'il a choisi le dessert A la semaine n. D'après l'énoncé, on a donc :
$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$$
On détermine de la même manière les autres probabilités conditionnelles. On a ainsi :
$$\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = 0 \qquad \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3} \qquad \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3} \qquad \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = 0$$
$$\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \qquad \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = 0 \qquad \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 1$$

2. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n)\\ &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n)\end{aligned}$$
De même, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n)\\ &= \frac{2}{3}\mathbb{P}(B_n)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \times \mathbb{P}(C_n)\\ &= \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_n)\end{aligned}$$

5.21 On a :
$$\Omega = \{1;2;3;4:5:6:\}$$
$$A = \{2;4;6\}$$
$$B = \{3;6\}$$
$$A \cap B = \{6\}$$
Donc,
$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
Et,
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$$
On a bien $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ donc A et B sont indépendants.

5.22

1. Commençons par traduire les informations données dans l'énoncé. On note F l'évènement « être fumeur » et B l'évènement « avoir une bronchite ». On a alors :

$$\mathbb{P}(F) = \frac{45}{100} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{35}{100} \qquad \mathbb{P}_B(F) = \frac{65}{100}$$

On a alors :

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(F \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(F) = \frac{35}{100} \times \frac{65}{100} = \frac{2275}{10000}$$
$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(\overline{F} \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(\overline{F}) = \frac{35}{100} \times \frac{35}{100} = \frac{1225}{10000}$$

Par ailleurs, on sait, d'après la formule des probabilités totales, que :

$$\begin{aligned} PP(F) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(F) + \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(F) \\ &= \frac{35}{100} \times \frac{65}{100} + \frac{35}{100} \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(F) \\ &= \frac{2275}{10000} + \frac{35}{100} \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(F) \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\frac{45}{100} = \frac{2275}{10000} + \frac{35}{100} \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(F)$$

Donc,

$$\frac{45}{100} - \frac{2275}{10000} = \frac{35}{100} \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(F)$$

Soit

$$\frac{2225}{10000} = \frac{35}{100} \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(F)$$

Donc,

$$\mathbb{P}_{\overline{B}}(F) = \frac{2225}{1000} \times \frac{100}{35} = \frac{445}{100} \times \frac{1}{7} = \frac{445}{700} = \frac{89}{140}$$

Et donc,

$$\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(\overline{F} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(\overline{F}) = \frac{65}{100} \times \frac{51}{140} = \frac{663}{2800}$$

2. On a :

$$\mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}(B) = \frac{45}{100} \times \frac{35}{100} = \frac{1575}{10000}$$

Et

$$\mathbb{P}(F \cap B) = \frac{2275}{10000}$$

Donc, F et B ne sont pas des évènements indépendants.

3. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\mathbb{P}_F(B) = \frac{\mathbb{P}(F \cap B)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{2275}{10000}}{\frac{45}{100}} = \frac{2275}{10000} \times \frac{100}{45} = \frac{455}{900} = \frac{91}{180}$$

5.23 Puisque les évènements sont indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Enfin, puisque A et B sont indépendants, $\overline{A}$, $\overline{B}$, A et B sont également indépendants.

$$\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$$

$$\mathbb{P}(E_4) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

5.24 On note A l'évènement « atteindre la cible située à 20 m » et B l'évènement « atteindre la cible située à 50 m ». La probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m est :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap \overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B \cap A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

La probabilité de gagner en commençant par la cible située à 50 m est :

$$\mathbb{P}(B \cap A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{B} \cap A \cap B) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

On a donc intérêt à commencer par la cible située à 50 m.

---

7. Table des matières

1 Le cadre probabiliste **2**
1.1 Un peu de vocabulaire . . . 2
1.2 Lien entre terminologie probabiliste et ensembliste . . . 3

2 Probabilités **5**
2.1 Propriétés de base . . . 5
2.2 Probabilités élémentaires . . . 6
2.3 Le cas de l'équiprobabilité . . . 7

3 Probabilités conditionnelles **8**
3.1 Définitions et propriétés. . . . 8
3.2 Formule des probabilités composées . . . 9
3.3 Formule des probabilités totales . . . 10
3.4 Lien avec les arbres pondérés . . . 12

4 Indépendance **13**
4.1 Indépendance de deux évènements . . . 13
4.2 Indépendance d'une famille d'évènements . . . 14

5 Exercices **16**
5.1 Évènements et langage ensembliste . . . 16
5.2 Calculs directs de probabilités . . . 17
5.3 Probabilités conditionnelles . . . 17
5.4 Formules des probabilités composées et totales . . . 18
5.5 Indépendance . . . 21

6 Corrigé des exercices **23**