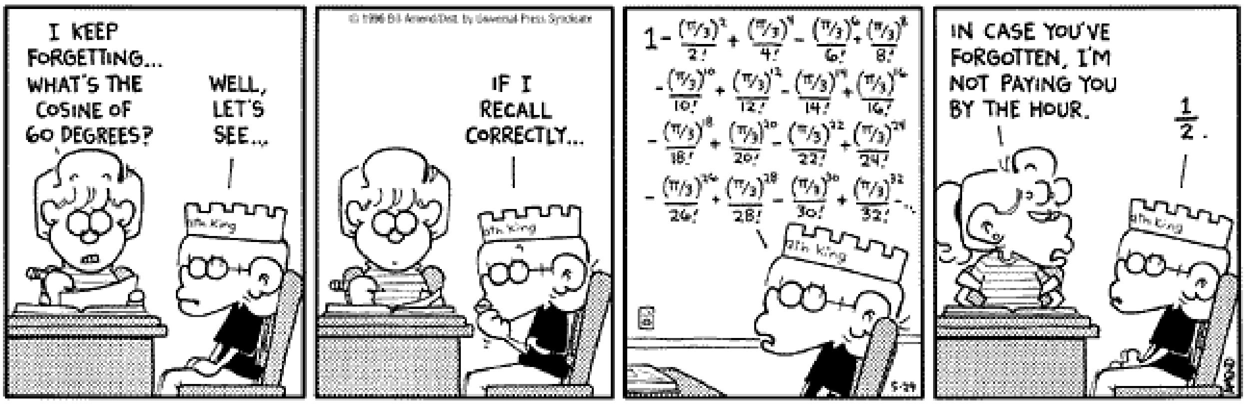
Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 4

Suites réelles



Adrien Fontaine

Année scolaire 2020–2021

1. Notion de suite réelle

Intuitivement, une suites réelle est une liste (infini) de nombres réels. Par exemple, la suite des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... On peut noter une telle liste de nombres u_0, u_1, u_2, ... , u_n (lire « u indice n »). u_0 désigne alors le premier nombre de la liste (dans notre exemple, $u_0 = 1$), u_1 le deuxième élément (ici $u_1 = 2$), et ainsi de suite : u_n désigne le $n+1$-ième élément de la liste.

Définition 1 :

- Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$
On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou encore (u_n).
- u_n est appelé **terme général** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n^2 - 1$.

- Le premier terme est : $u_0 = 0^2 - 1 = -1$
- Le deuxième terme est : $u_1 = 1^2 - 1 = 0$
- Le troisième terme est : $u_2 = 2^2 - 1 = 3$
- Le terme de rang n est : $u_n = n^2 - 1$

Remarque :
- À la notation habituelle $u(n)$, on préfère donc la notation indicée u_n.
- Il est possible que la suite ne commence pas au rang 0 et que les termes u_n ne soient définis que pour $n \geqslant 1$, ou de manière générale pour $n \geqslant n_0$, où n_0 est un entier quelconque. Dans ce cas, on notera $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ou $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Définition d'une suite. Une suite réelle peut être définie de différentes façons :
- **Explicitement :** une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie *explicitement* lorsque l'expression de son terme général u_n est donnée par une formule qui ne dépend que de n. Auquel cas, on peut calculer directement n'importe quel terme de cette suite.
- **Par une relation de récurrence :** une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie *par une relation de récurrence* lorsque l'on donne le premier terme de la suite et une formule (appelée relation de récurrence) qui permet de calculer un terme en fonction du précédent :
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exemples :
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$. On a :
$$u_7 = 2\times 7^2 - 3\times 7 + 1 = 78$$
- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = -2v_n + 3 \end{cases}$$

Calculer v_4.

On a :

$$v_1 = -2v_0 + 3 = -2 \times 3 + 3 = -6 + 3 = -3$$
$$v_2 = -2v_1 + 3 = -2 \times (-3) + 3 = 6 + 3 = 9$$
$$v_3 = -2v_2 + 3 = -2 \times 9 + 3 = -15$$
$$v_4 = -2v_3 + 3 = -2 \times (-15) + 3 = 30 + 3 = 33$$

Remarque : Quand une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, le calcul d'un terme nécéssite a priori le calcul successif de tous les termes précédents. Par exemple, pour calculer u_{100}, il est nécéssaire de calculer les 100 termes précédents. Cela peut se révéler très fastidieux en pratique et on essaie donc, lorsque c'est possible, de déterminer une formule explicite donnant le terme u_n en fonction de n.

2. Suite arithmétique

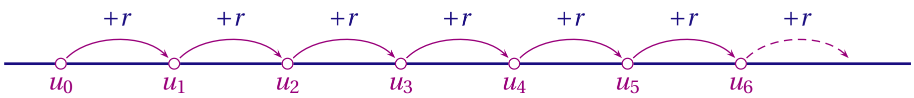
2.1. Définition

Définition 2 :

Soit (u_n) une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r appelé **raison** tel que :

$$n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r :



Exemples :

1. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. On dépose chaque année 10 euros. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le montant sur le compte de l'année n.
   On a : $u_{n+1} = u_n + 10$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 10.
2. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros. On dépense chaque année 7 euros. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le montant sur le compte de l'année n.
   On a : $u_{n+1} = u_n - 7$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison -7.

Remarque : Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égal à une constante qui ne dépend pas de n (cette constante est la raison r).

Exemple : Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles arithmétiques ?

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2n+1$.
On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 2(n+1)+1-(2n+1) \\ &= 2n+2+1-2n-1 = 2 \end{aligned}$$

Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = n^2+1$.
On a :

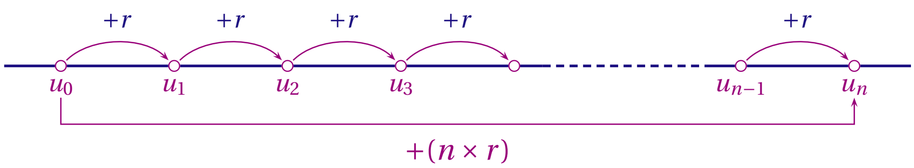
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (n+1)^2+1-(n^2+1) \\ &= n^2+2n+1+1-n^2-1 \\ &= 2n+1 \end{aligned}$$

Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite arithmétique.

2.2. Expression explicite

Proposition 1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr$$



Remarque : On a également :

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \qquad u_n = u_2 + (n-2)r \qquad \text{etc.}$$

Exemple :

1. On reprend l'exemple **1** de la partie **3.1**. Calculer le montant sur le compte au bout de 10 ans.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme $u_0 = 100$ donc, pour tout n, on a :

$$u_n = u_0 + nr = 100 + 10n$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -7$. Calculer u_5 et u_{100}.
On a $u_n = u_0 + nr = -7+5n$. Donc,

$$u_5 = -7+5\times 5 = 18 \quad \text{et} \quad u_{100} = -7+5\times 100 = 493$$

3. Suite géométrique

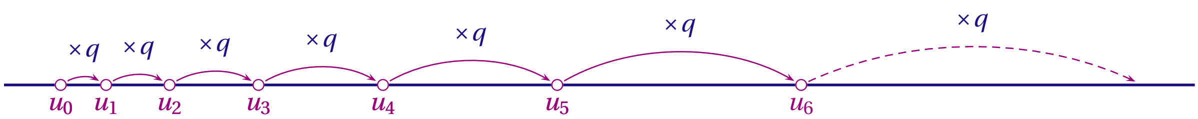
3.1. Définition

Définition 3 :

Soit (u_n) une suite. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe un réel q appelé **raison** tel que :

$$n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q \times u_n$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q :



Exemples :

1. Soit un compte sur lequel il y a 100 euros et qui rapporte chaque année 3% d'intérêts. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le montant sur le compte à l'année n.
   On a : $u_{n+1} = 1,03u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1,03$.
2. Les réserves de pétroles en Alberta diminuent chaque année de 10%, sachant que les réserves initiales étaient de 10^{11}L. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre de litres lors de l'année n.
   On a : $u_{n+1} = 0,9u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $0,9$.

Remarque : Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, il suffit de montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (sous réserve que $u_n \neq 0$) est égal à une constante qui ne dépend pas de n (cette constante est la raison q).

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$ pour $n \geqslant 0$.

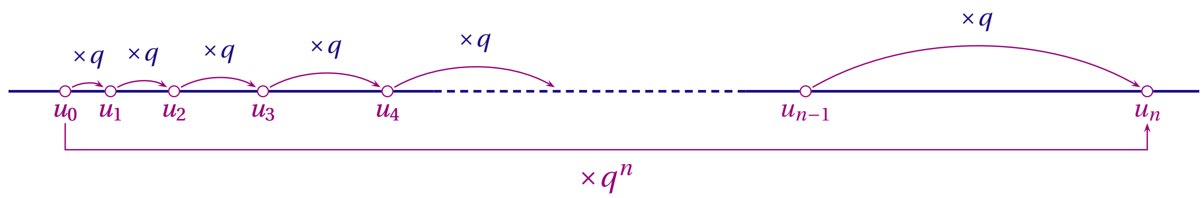
1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle géométrique ?
   On a $u_0 = 2$, $u_1 = 2u_0 - 3 = 1$ et $u_2 = 2u_1 - 3 = -1$. Ainsi, $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = -1$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique.
2. Soit $v_n = u_n - 3$ pour $n \geqslant 0$. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

3.2. Expression explicite

Proposition 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0 = q^{n-1} u_1$$



Remarque : On a également :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}, \qquad u_n = u_2 \times q^{n-2}, \qquad \text{etc.}$$

Exemple :

1. On reprend l'exemple **1** de la partie **3.1**. Calculer le montant sur le compte au bout de 10 ans.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $u_0 = 100$, donc pour tout n :
   $$u_n = u_0 \times q^n = 100 \times (1{,}03)^n$$
   Et donc,
   $$u_{10} = 100 \times (1{,}03)^{10} \simeq 134$$
   Il y aura donc environ 134 € sur le compte au bout de 10 ans.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1024$. Calculer u_{10}.
   On a :
   $$u_n = u_0 \times q^n = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1024}{2^n}$$
   Donc,
   $$u_{10} = \frac{1024}{2^{10}} = \frac{1024}{1024} = 1$$

4. Suite arithmético-géométrique

4.1. Définition

Définition 4 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque :

- Si $a = 1$, alors :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + b$$
  Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b.

- Si $b = 0$, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n$$
Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

Exemple : On veut placer 100 euros sur un compte rémunéré à 5%. Mais chaque année, la banque réclame 3 euros de frais. On note u_n le montant sur le compte au bout de n années.
On a, pour tout n :
$$u_{n+1} = 1,05u_n - 3$$
Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

4.2. Expression explicite

Méthode 1 : Trouver l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de la forme :
$$u_{n+1} = au_n + b$$
Pour exprimer u_n en fonction de n, on procède selon les étapes suivantes :

1. On cherche le point fixe α tel que $\alpha = a\alpha + b$;
2. On pose $v_n = u_n - \alpha$ et on montre que v_n est géométrique de raison a.
3. On exprime v_n puis u_n en fonction de n.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Exprimer u_n en fonction de n.

1. On commence par chercher le point fixe :
$$\alpha = 3\alpha - 8 \iff -2\alpha = -8 \iff \alpha = \frac{-8}{-2} = 4$$
2. On pose $v_n = u_n - 4$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3. On a :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= 3u_n - 8 - 4 \\ &= 3(v_n + 4) - 12 \\ &= 3v_n + 12 - 12 \\ &= 3v_n \end{aligned}$$
Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géométrique de raison 3.
3. Le premier terme de v_n est $v_0 = u_0 - 4 = 2 - 4 = -2$. Ainsi, puisque v_n est géométrique de raison 3, on a pour tout n :
$$v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 3^n$$
On en déduit, pour tout n :
$$u_n = v_n + 4 = -2 \times 3^n + 4$$

5. SYMBOLE SOMMATOIRE ET CALCULS DE SOMMES

5.1. Symbole sommatoire Σ

Le symbole Σ va nous permettre d'écrire des sommes de manière compacte.

Définition 5 : Symbole Σ

Soient u_1, u_2, ... , u_n des réels. La somme des n réels $u_1 + u_2 + ... + u_n$ se note $\sum_{i=1}^{n} u_i$. Autrement dit, on a - par définition - l'égalité suivante :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Exemple :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$
- $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} 2j+1 = (2\times 0+1) + (2\times 1+1) + (2\times 2+1) + (2\times 3+1) + (2\times 4+1) + (2\times 5+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 1$
- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n$

Remarque :

- L'avantage de cette notation est de supprimer les points de suspension. Certes, il faut un peu de temps pour maîtriser cette nouvelle notation, mais une fois maîtrisée, elle s'avère plus pratique que la notation avec les points de suspension.
- Comme on peut le voir sur les exemples ci-dessus, une somme peut commencer 0̀, à 1, mais aussi à n'importe quel entier naturel.
- Le choix de la lettre qui apparait en indice n'importe pas. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{p=1}^{100} p^2 = \sum_{a=1}^{100} a^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$$

Proposition 3 : Linéarité de la somme

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques et α un réel. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \alpha u_k = \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k + v_k &= u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \cdots + u_n + v_n \\ &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n + v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \alpha u_k &= \alpha u_0 + \alpha u_1 + \cdots + \alpha u_n \\ &= \alpha (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n} u_k\end{aligned}$$

□

5.2. Quelques sommes remarquables

5.2.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 1 : Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)\cdot(n+1)}{2}$$

Remarque : En particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple :

1. Calculer $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 58 + 61 + 64$.
   On reconnait les termes d'une suite géométrique de raison 3 de premier terme $u_0 = 1$. Le dernier terme de cette somme est $u_n = 64$. Cherchons la valeur de n. On sait que :

   $$u_n = u_0 + nr = 1 + 3n$$

   On a donc $1 + 3n = 64 \iff 3n = 63 \iff n = \frac{63}{3} = 21$. Ainsi,

   $$S = \sum_{k=0}^{21} u_k = \frac{(u_0 + u_{21}) \times (21+1)}{2} = \frac{(1+64)\times 22}{2} = 65 \times 11 = 715$$

2. Calculer $\sum_{k=1}^{100} k$.

On a :

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

5.2.2 Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 2 : Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : En particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple :

1. Calculer $\mathrm{S} = 1+2+4+8+16+32+\cdots+1024+2048$.

   On a :

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{11} 2^k = \frac{1-2^{11+1}}{1-2} = \frac{1-2^{12}}{-1} = 4096-1 = 4095$$

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

   On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

6. Exercices

4.1 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n = 5\sqrt{n}-3$ et $v_n = \dfrac{-2}{n+1}+1$.

1. Calculer les deux premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le quinzième terme de chaque suite.

4.2 On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} = -u_n^2+u_n-1 & \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 & = & 5 \\ v_{n+1} & = & v_n+\frac{2}{n} \end{cases}$$

Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.

4.3 Soit u_n la suite définie par $u_n = n^2-n+1$.

1. Calculer u_0 et u_{10}.
2. Exprimer u_n+1 et u_{n+1} en fonction de n.

4.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0=4$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{10}.

4.5 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite arithmétique de raison r.

1. On donne $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $r=\dfrac{-1}{4}$. Calculer u_{13}.
2. On donne $u_{36}=86$ et $r=2$. Calculer u_0.
3. On donne $u_2=2$ et $u_{15}=67$. Calculer r et u_1.
4. On donne $u_8=34$ et $r=3$. Calculer u_1.

4.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0=7$ et de raison $q=3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_5.

4.7 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite géométrique de raison q.

1. On donne $u_1=2$ et $q=\frac{3}{2}$. Calculer u_5.
2. On donne $u_4=7$ et $q=\frac{1}{3}$. Calculer u_1.
3. On donne $u_2=4$ et $u_4=\dfrac{16}{9}$. Calculer q.
4. On donne $u_0=8$ et $q=\frac{1}{2}$. Calculer u_7.

4.8 On suppose que chaque année, la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.

1. On note $P_0 = 25000$ et P_n la production au cours de l'année $(2000+n)$.
Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer la production de l'usine en 2005.
Indication numérique : $0,96^5 \simeq 0,82$.

4.9 On place un capital $u_0 = 1500$ euros à $4,5\%$ par an avec intérêts simples. On note u_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
3. Au bout de combien d'années, le capital initial aura-t-il doublé ?

4.10 On place un capital $u_0 = 3500$ euros à 3% par an avec intérêts composés. On note u_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
Indication numérique : $1,03^{10} \simeq 1,34$

4.11 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + 1$.
   a. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4.
   b. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   c. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4.12 La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.
Elle estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n le nombre d'inscrits à la méditahtèque pendant l'année $2013+n$.

1. a. Calculer a_1 et a_2.
   b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
2. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 2000$.
   a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
   b. En déduire que le terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.

4.13 Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$;

2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024}$;
3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots + \frac{a^n}{n}$;
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$;
5. $S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 13^2 + 14^2$;
6. $S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125$.

4.14 Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ, en faisant disparaître ce symbole :

1. $T_1 = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2}$;
2. $T_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1}$;

4.15 Calculer les sommes S et T :

$$S = 2 + 6 + 18 + \cdots + 118098 \qquad \text{et} \qquad T = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{59049}$$

4.16 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Calculer S_{10}.

4.17 Une entreprise propose pour recruter un nouvel employé un salaire annuel de 21000 euros avec augmentation annuelle du salaire de 4% tous les ans.
On note s_n le salaire annuel pour l'année n. On a donc $s_1 = 21000$.

1. Calculer s_2 et s_3.
2. Donner la nature de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exprimer s_n en fonction de n.
3. Justifier que $\sum_{k=1}^{5} s_k \simeq 115500$.
   Indication numérique : $1,04^5 \simeq 1,22$
4. Si cet employé reste 20 ans dans l'entreprise, calculer la somme des salaires perçus durant ces 20 ans. En déduire son salaire annuel moyen sur ces 20 ans.
   Indication numérique : $1,04^{20} \simeq 2,19$

7. Corrigé des exercices

4.1

1. On a :

$$u_0 = 5\sqrt{0} - 3 = -3 \qquad \text{et} \qquad u_1 = 5\sqrt{1} - 3 = 5 - 3 = 2$$
$$v_0 = \frac{-2}{0+1} + 1 = -2 + 1 = -1 \qquad \text{et} \qquad v_1 = \frac{-2}{1+1} + 1 = -1 + 1 = 0$$

2. On a :

$$u_{14} = 5\sqrt{14} - 3 \qquad \text{et } v_{14} = \frac{-2}{14+1} + 1 = \frac{-2}{15} + 1 = \frac{-2}{15} + \frac{15}{15} = \frac{13}{15}$$

4.2 On a :

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = -u_0^2 + u_0 - 1 = -1 + 1 - 1 = -1$$
$$u_2 = -u_1^2 + u_1 - 1 = -(-1)^2 + (-1) - 1 = -1 - 1 - 1 = -3$$
$$u_3 = -u_2^2 + u_2 - 1 = -(-3)^2 + (-3) - 1 = -9 - 3 - 1 = -13$$

De même,

$$v_1 = 5$$
$$v_2 = v_1 + \frac{2}{1} = 5 + 2 = 7$$
$$v_3 = v_2 + \frac{2}{2} = 7 + 1 = 8$$
$$v_4 = v_3 + \frac{2}{3} = 8 + \frac{2}{3} = \frac{24}{8} + \frac{2}{3} = \frac{26}{3}$$

4.3

1. On a :

$$u_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$$
$$u_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 100 - 10 + 1 = 91$$

2. On a :

$$u_n + 1 = n^2 - n + 1 + 1 = n^2 - n + 2$$
$$u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$$

4.4

1. Pour une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on a pour tout n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Ici, $u_0 = 4$ et $r = \frac{1}{2}$, donc pour tout n :

$$u_n = 4 + n \times \frac{1}{2} = 4 + \frac{n}{2}$$

2. On a alors :

$$u_{10} = 4 + \frac{10}{2} = 4 + 5 = 9$$

4.5

1. Pour une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, on a pour tout n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Ici, $u_0 = \frac{1}{2}$ et $r = \frac{-1}{4}$, donc pour tout n :

$$u_n = \frac{1}{2} + n \times \frac{-1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{n}{4}$$

On a alors :

$$u_{13} = \frac{1}{2} - \frac{13}{4} = \frac{-11}{4}$$

2. On a :

$$u_n = u_0 + nr = u_0 + 2n$$

Donc,

$$u_36 = u_0 + 2 \times 36 = u_0 + 72$$

i.e

$$86 = u_0 + 72 \qquad \text{d'où} \qquad u_0 = 86 - 72 = 14$$

3. On a :

$$u_n = u_2 + (n-2)r$$

donc

$$u_{15} = u_2 + 13r$$

i.e

$$67 = 2 + 13r$$

donc

$$13r = 67 - 2 = 65 \qquad i.e \qquad r = \frac{65}{13}$$

Dès lors,

$$u_1 = u_2 - r = 2 - \frac{65}{13} = \frac{26}{13} - \frac{65}{13} = -\frac{39}{13}$$

4. On a :

$$u_n = u_1 = (n-1)r = u_1 + (n-1) \times 3$$

Donc,

$$u_8 = u_1 + 7 \times 3 = u_1 + 21$$

i.e

$$24 = u_1 + 21 \qquad \text{d'où} \qquad u_1 = 24 - 21 = 3$$

4.6

1. Pour une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, on a pour tout n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Ici, $u_0 = 7$ et $q = 3$, donc pour tout n :

$$u_n = 7 \times 3^n$$

2. On a alors :

$$u_5 = 7 \times 3^5 = 7 \times 243 = 1701$$

4.7

1. On a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Donc,

$$u_5 = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 2 \times \frac{81}{16} = \frac{81}{8}$$

2. On a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = u_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Donc,

$$u_4 = u_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

i.e

$$7 = u_1 \times \frac{1}{27}$$

donc,

$$u_1 = 7 \times 27 = 189$$

3. On a :

$$u_n = u_2 \times q^{n-2} = 4 \times q^{n-2}$$

Donc,

$$u_4 = 4 \times q^{4-2} = 4 \times q^2$$

i.e

$$\frac{16}{9} = 4 \times q^2$$

i.e

$$q^2 = \frac{16}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{9} \qquad \text{d'où} \qquad q = \pm\frac{2}{3}$$

4. On a

$$u_n = u_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc,

$$u_7 = 8 \times \frac{1}{2^7} = \frac{8}{128} = \frac{1}{16}$$

4.8

1. Chaque année, la production baisse de 4%. Autrement dit, chaque année la production est multipliée par $\frac{96}{100}$. Ainsi, (P_n) est une suite géométrique de raison $\frac{96}{100}$.

2. On a alors pour tout n :

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0 \times q^n = 25000 \times \left(\frac{96}{100}\right)^n$$

Donc,

$$\mathrm{P}_5 = 25000 \times 0,96^5 \simeq 25\,000 \times 0,82 \simeq 20500$$

4.9

1. On a :

$$1500 \times \frac{45}{1000} = 67,5$$

Donc, chaque année, le capital augmente de 67,5 euros. Ainsi, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 67,5 et de premier terme $u_0 = 1500$. Ainsi, pour tout n, on a :

$$u_n = u_0 + nr = 1500 + 67,5 \times n$$

2. Au bout de 10 ans, le capital est donné par :

$$u_{10} = 1500 + 67,5 \times 10 = 1500 + 675 = 2175$$

3. Le capital aura doublé lorsque

$$1500 + 67,5 \times n = 1500 \times 2 = 3000$$

i.e pour

$$n = \frac{1500}{67,5} = 22,2$$

Au bout de 23 ans, le capital aura doublé.

4.10

1. Chaque année, le capital augmente de 3%. Autrement dit, chaque année le capital est multiplié par $\frac{103}{100}$. Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{103}{100}$.
2. Pour tout n, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n = 3500 \times (1,03)^{10}$$

Donc,

$$u_{10} = 3500 \times (1,03)^{10} \simeq 3500 \times 1,34 \simeq 4703$$

Le capital au bout de 10 ans sera d'environ 4703 euros.

4.11

1. On a :

$$u_1 = 1 + 2u_0 = 1 + 2 \times 1 = 1 + 2 = 3$$
$$u_2 = 1 + 2u_1 = 1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$$
$$u_3 = 1 + 2u_2 = 1 + 2 \times 7 = 1 + 14 = 15$$
$$u_4 = 1 + 2u_3 = 1 + 2 \times 15 = 1 + 30 = 31$$

2. La suite n'est pas arithmétique car

$$u_1 - u_0 = 3 - 1 = 2 \qquad \text{tandis que} \qquad u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$$

Elle n'est pas géométrique non plus car

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \text{tandis que} \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{3}$$

3. **a.** On a :

$$v_0 = u_0 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$v_1 = u_1 + 1 = 3 + 1 = 4$$
$$v_2 = u_2 + 1 = 7 + 1 = 8$$
$$v_3 = u_3 + 1 = 15 + 1 = 16$$
$$v_4 = u_4 + 1 = 31 + 1 = 32$$

b. Il semblerait, au vu des calculs de la question précédente, que (v_n) soit géométrique de raison 2. Démontrons le. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 1 + 2u_n + 1 \\ &= 1 + 2(v_n - 1) + 1 \\ &= 1 + 2v_n - 2 + 1 \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est bien géométrique de raison 2.

c. On a donc pour tout n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

4. On a :

$$u_n = v_n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

4.12

1. a. On a :

$$a_1 = 2500 \times \frac{80}{100} + 400 = 2000 + 400 + 2400$$
$$a_2 = 2400 \times \frac{80}{100} + 400 = 1920 + 400 = 2320$$

b. Chaque année, 80% des anciens inscrits renouvellent leur inscription. Ainsi, le nombre d'inscrits de l'année n est multiplié par $0,8$. Par ailleurs, 400 nouvelles personnes s'inscrivent. Ainsi, on a bien :

$$a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$$

2. a. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 2000 \\ &= 0,8 \times a_n + 400 - 2000 \\ &= 0,8(u_n + 2000) - 1600 \\ &= 0,8u_n + 1600 - 1600 \\ &= 0,8u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc bien géométrique de raison $0,8$. Par ailleurs, son premier terme est donné par :

$$u_0 = a_0 - 2000 = 2500 - 2000 = 500$$

b. La suite (u_n) étant géométrique, on a pour tout n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 500 \times 0,8^n$$

Et donc,

$$a_n = u_n + 2000 = 500 \times 0,8^n + 2000$$

4.13

1. On a :

$$S_1 = \sum_{k=3}^{12} 2^k$$

2. On a :

$$S_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2^k}$$

3. On a :

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k}$$

4. On a :

$$S_4 = \sum_{k=1}^{25} (-1)^{k+1} \times 2^k$$

5. On a :

$$S_5 = \sum_{k=1}^{14} k^2$$

6. On a :

$$S_6 = \sum_{k=1}^{5} k^3$$

4.14

1. On a :

$$T_1 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{10^2}$$

2. On a :

$$T_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{21}$$

4.15 Pour la somme S, on reconnait la somme des termes d'une suite géométrique u_n de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Par ailleurs, :

$$118098 = 2 \times 3^{10}$$

Ainsi,

$$S = \sum_{k=0}^{10} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{10+1}}{1-q} = 2 \times \frac{177146}{2} = 177146$$

Pour la somme T, on reconnait la somme des termes d'une suite géométrique v_n de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$. Par ailleurs,

$$\frac{2}{59049} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

Ainsi,

$$\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{10} v_k = v_0 \times \frac{1-q^{10+1}}{1-q} = 2 \times \frac{1-\dfrac{1}{177147}}{1-\dfrac{1}{3}} = 2 \times \frac{\dfrac{177146}{177147}}{\dfrac{2}{3}} = \frac{177146}{59049}$$

4.16 On a :

$$\mathrm{S}_{10} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\dfrac{1}{2^{11}}}{1-\dfrac{1}{2}} = \frac{1-\dfrac{1}{2048}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{2047}{1024}$$

4.17

1. On a

$$s_2 = 21000 \times 1,04 = 21840$$

$$s_3 = 21840 \times 1,04 = 22713,6$$

2. La suite (s_n) est une suite géométrique de premier terme $s_1 = 21\,000$ et de raison $1,04$. Ainsi, pour tout n,

$$s_n = s_1 \times q^{n-1} = 21000 \times (1,04)^{n-1}$$

3. On a :

$$\sum_{k=1}^{5} s_k = s_1 \times \frac{1-(1,04)^5}{1-1,04} \simeq 21000 \times \frac{1-1,22}{1-1,04} = 21000 \times \frac{0,22}{0,04} = 21000 \times 5,5 = 115500$$

4. On a :

$$\sum_{k=1}^{20} s_k = 21000 \times \frac{1-(1,04)^{20}}{1-1,04} = 21000 \times \frac{1,19}{0,04} = 21000 \times 29,75 = 624750$$

Son salaire moyen sur 20 ans est donc de :

$$\frac{624750}{20} = 31237,5 \text{ euros}$$

---

8. TABLE DES MATIÈRES