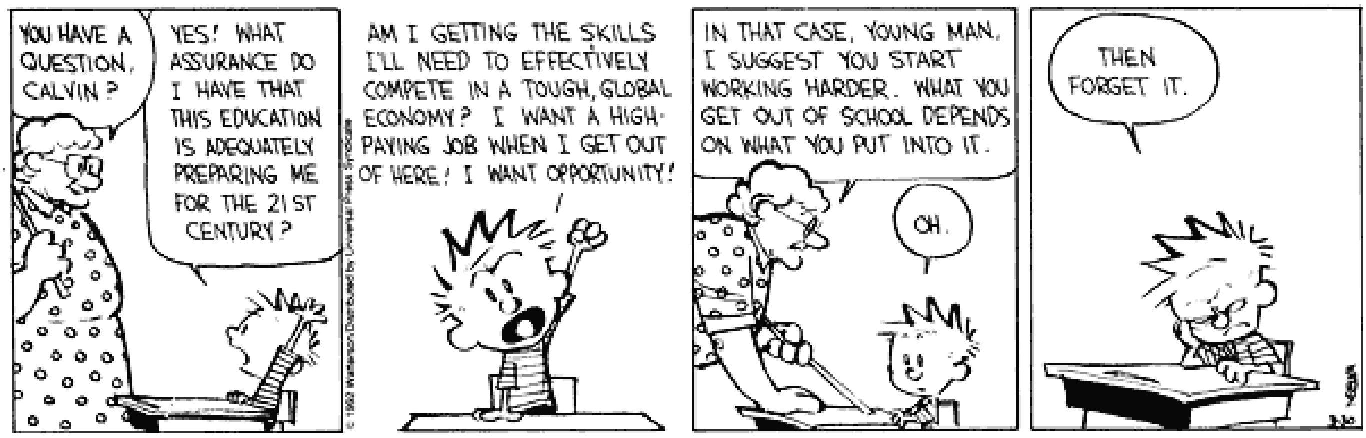
Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions



Adrien Fontaine
Année scolaire 2019–2020

1. Quelques rappels sur les fonctions

Définition 1 :

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble $\mathscr{D}$ associe un nombre y. On note :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{ou} \qquad f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}\,; x \mapsto f(x)$$

$f(x)$ est appelé **l'image** de x par f, tandis que x est appelé **antécédent** de $f(x)$ par f.

Exemple :

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x+3$.
   - ➔ L'image de 2 est $f(2) = 2\times 2+3 = 7$
   - ➔ Les antécédents de 4 vérifient $f(x) = 4$ c'est-à-dire
   $$2x+3=4 \iff 2x=1 \iff x=\frac{1}{2}$$
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2+3$.
   - ➔ L'image de 5 est $g(5) = 5^2+3 = 28$
   - ➔ Les antécédents de 7 vérifient $g(x) = 7$ c'est-à-dire
   $$x^2+3=7 \iff x^2=4 \iff x=4 \text{ ou } x=-4$$
   - ➔ Il n'y a pas d'antécédent de 1 car
   $$x^2+3=1 \iff x^2=-2$$
   ce qui est impossible puisqu'un carré est toujours positif.

Remarque : Il peut y avoir un, plusieurs ou même aucun antécédent. Par contre, il ne peut y avoir qu'une seule image !

Définition 2 : Ensemble de définition

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé **ensemble de définition** de la fonction f, souvent noté $\mathscr{D}_f$.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-4}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

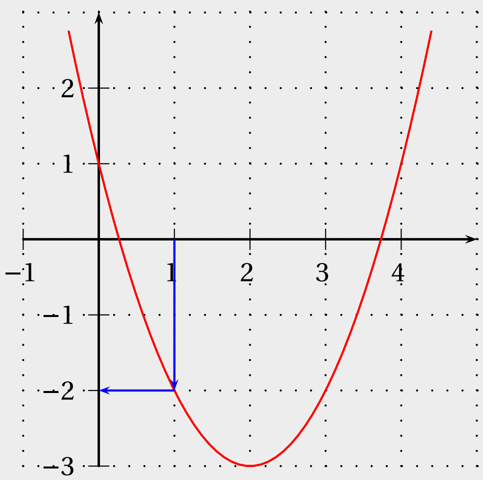
Définition 3 : Courbe représentative

Dans le plan, muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on nomme **courbe représentative** d'une fonction numérique f, l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ du plan, pour x parcourant l'ensemble de définition de f.

Remarque : Ainsi, les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées et les antécédents x sur l'axe des abscisses.

Méthode 1 : Lire une image ou un antécédent à partir d'une courbe

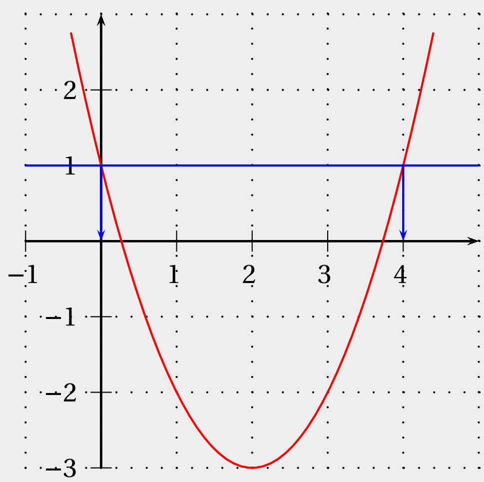
Lire l'image d'un nombre :



on place x sur l'axe des abscisses
on se déplace verticalement
pour rencontrer $\mathscr{C}_f$
on lit $f(x)$ sur l'axe des ordonnées

L'image de 1 par f est -2

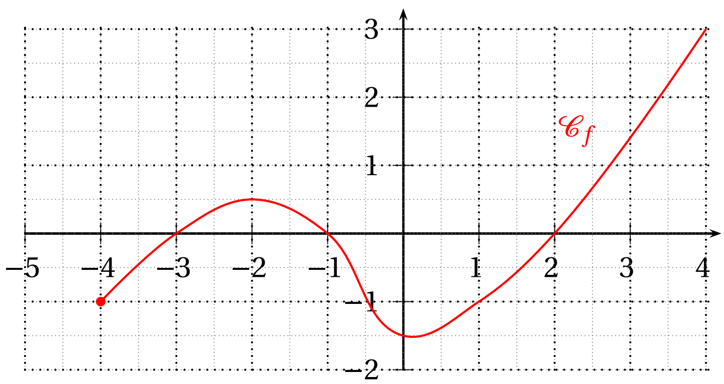
Trouver l'(les)antécédent(s) d'un nombre



on trace une horizontale
passant par cette valeur
à partir des points d'intersection, on se
déplace verticalement vers l'axe des abscisses
pour lire les antécédents

Les antécédents de 1 par f sont 0 et 4.

Exemple : Soit f la fonction dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ suivante :



1. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(-4)$, $f(-3)$ et $f(0)$.
   On a $f(-4) = -1$, $f(-3) = 0$ et $f(0) = -1,5$
2. Déterminer les images par f de 1 et 3.
   On a $f(1) = -1$ et $f(3) = 1,5$
3. Trouver le ou les antécédents par la fonction f, s'ils existent, des nombres $\frac{1}{2}$; -1 et 2.
   Les antécédents de $\frac{1}{2}$ sont -2 et $2,4$.
   Les antécédents de -1 sont -4, $-0,5$ et 1.
   L'antécédent de 2 est $3,4$.

2. Propriétés éventuelles d'une fonction

2.1. Parité

Définition 4 : Fonction paire, fonction impaire

- On dit que f est **paire**, si $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,
$$f(-x) = f(x)$$
- On dit que f est **impaire**, si $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,
$$f(-x) = -f(x)$$

Remarque : La condition « $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 » ne doit pas être oubliée lorsque l'on démontre qu'une fonction est paire ou impaire.
Par exemple, une fonction $f : [-1;2] \to \mathbb{R}$, quelque soit son expression, ne saurait être paire ou impaire, puisque son ensemble de définition $[-1;2]$ n'est pas une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

Méthode 2 : Étudier la parité d'une fonction

On procède toujours en deux temps :

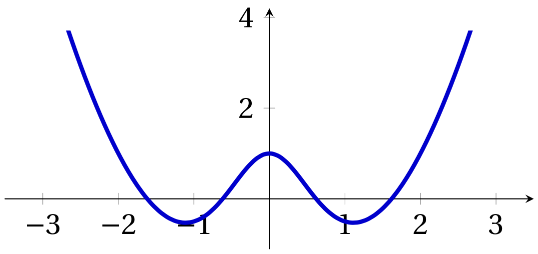
1. On vérifie que $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0.
2. On exprime $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$.

Exemple : La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est impaire car

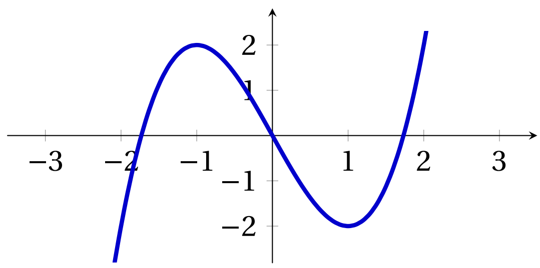
$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$$

Théorème 1 : Interprétation graphique

- Si f est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, sa courbe reprsentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Courbe représentative d'une fonction paire



Courbe représentative d'une fonction impaire

2.2. Monotonie

Définition 5 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. f est **croissante** sur I si :
$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
2. f est **strictement croissante** sur I si :
$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$
3. f est **décroissante** sur I si :
$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$
4. f est **strictement décroissante** sur I si :
$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

Lorsque f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante), on dit que f est **monotone** (resp. **strictement monotone**).
Enfin, f est dite **constante** sur I lorsque : $\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad f(x) = f(y)$.

Remarque :
- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre et qu'une fonction décroissante inverse l'ordre.
- Il existe des fonctions qui ne sont pas monotones, c'est-à-dire qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

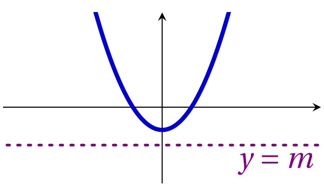
2.3. Fonctions bornées

Définition 6 :

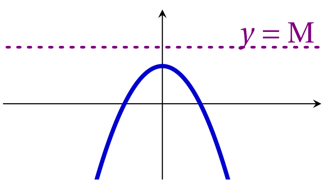
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est :

- **majorée** lorsqu'elle vérifie
$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathrm{D}, \qquad f(x) \leqslant \mathrm{M}$$
Le cas échéant, on dit que M est un **majorant** de f.
- **minorée** lorsqu'elle vérifie
$$\exists m \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \in \mathrm{D}, \qquad f(x) \geqslant m$$
Le cas échéant, on dit que M est un **minorant** de f.
- **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée *et* minorée.

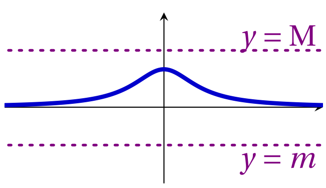
Remarque : Graphiquement, une fonction f est majorée par un réel M (resp. minorée par un réel m) lorsque sa courbe représentative est située au-dessous (resp. au-dessus) de la droite horizontale d'équation $y = \mathrm{M}$ (resp. $y = m$).



Fonction minorée



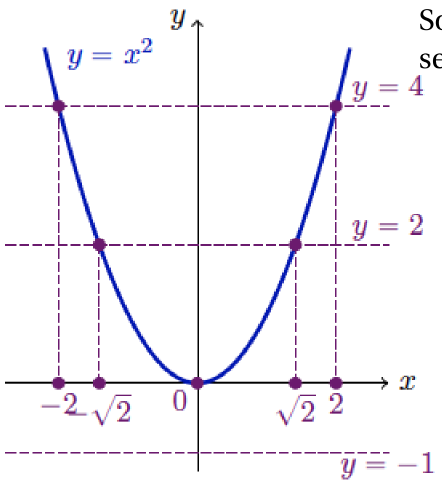
Fonction majorée



Fonction bornée

3. Fonctions usuelles

3.1. Fonction carrée



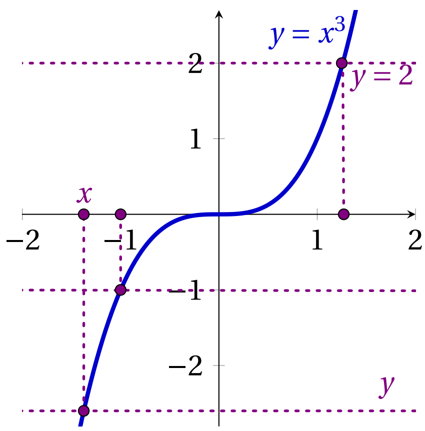
Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carrée, dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

- Son ensemble de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
- 2 et −2 ont la même image par la fonction carrée, à savoir 4.
  En effet, $2^2 = (-2)^2 = 4$
- Les antécédents de 2 par la fonction carrée sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
  En effet, les deux solutions de l'équation $x^2 = 2$ sont $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
- −1 n'a pas d'antécédent par la fonction carrée, puisque l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle.

Théorème 2 : La fonction carrée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ ; x \mapsto x^2$

- est à valeurs positives ;
- est paire ;
- est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$;

3.2. Fonction cube



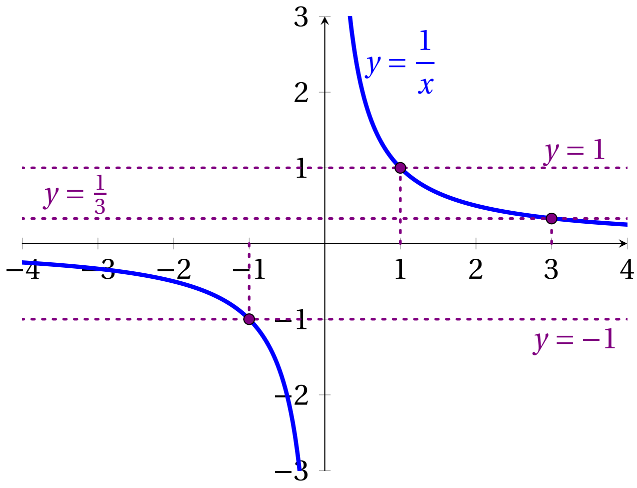
Soit g la fonction cube $g : x \mapsto x^3$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

- Son ensemble de définition est $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.
- −1 a pour image −1. En effet, $g(-1) = (-1)^3 = -1$.
- 2 a pour unique antécédent par g, le nombre, noté $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$.
- En fait, tout élément $y \in \mathbb{R}$ admet un unique antécédent x par g, noté $\sqrt[3]{y}$.
  On dit que la fonction cube $g : x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3 : La fonction cube $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; x \mapsto x^3$

- est impaire ;
- est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}$.

3.3. Fonction inverse



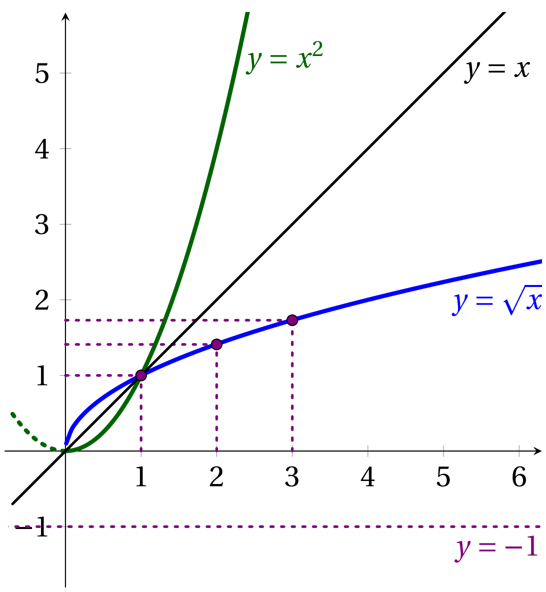
Soit h la fonction inverse $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

- Son ensemble de définition est $\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$. En effet, $\dfrac{1}{x}$ n'est pas défini pour $x = 0$.
- L'image de 1 est 1 et l'image de -1 est -1. En effet, $h(1) = \frac{1}{1}$ et $h(-1) = \frac{1}{-1} = -1$.
- L'unique antécédent de $\dfrac{1}{3}$ est 3.

Théorème 4 : La fonction inverse $\quad f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* ; x \mapsto \dfrac{1}{x}$

- est impaire ;
- est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$;
- n'est ni majorée, ni minorée sur $\mathbb{R}^*$.

3.4. Fonction racine carrée



Soit i la fonction racine carrée $i : x \mapsto \sqrt{x}$.

- Sa courbe représentative est la branche de parabole obtenue par symétrie par rapport à la droite $y = x$ de la courbe représentative de la fonction carrée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.
- Son domaine de définition est

$$\mathscr{D}_i = \mathbb{R}_+$$

- Les images de 0, 1, 2 et 3 sont :

$$i(0) = \sqrt{0} = 0 \qquad i(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$i(2) = \sqrt{2} \simeq 1,41 \qquad i(3) = \sqrt{3} \simeq 1,73$$

- -1 n'a pas d'antécédent par la fonction racine carrée.

Théorème 5 : La fonction racine carrée $\quad f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ ; x \mapsto \sqrt{x}$

- est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$;
- est minorée par 0 mais n'est pas majorée.

4. Opérations sur les fonctions

Définition 7 :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.

- **Addition.** $f+g$ désigne la fonction définie sur $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ par :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g, \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- **Multiplication.** fg désigne la fonction définie sur $\mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ par :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g, \qquad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$$

- **Division.** $\dfrac{f}{g}$ désigne la fonction définie $\mathrm{D} = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g \setminus \{$ solutions de $g=0\}$ par :

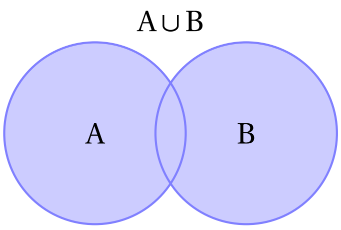
$$\forall x \in \mathrm{D}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Remarque : **Les symboles « réunion » $\cup$, « intersection » $\cap$ et « privé de » $\setminus$**

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle *réunion* (ou *union*) de A et B, notée $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, l'ensemble des x tels que :

$$x \in \mathrm{A} \qquad \text{OU} \qquad x \in \mathrm{B}$$

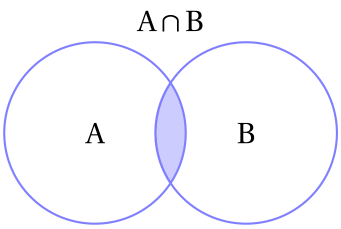


Par exemple,
si $\mathrm{A} = \{1;2;4;7\}$ et $\mathrm{B} = \{2;3;7;8;9\}$, alors

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1;2;3;4;7;8;9\}$

- On appelle *intersection* de A et B, notée $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, l'ensemble des x tels que :

$$x \in \mathrm{A} \qquad \text{ET} \qquad x \in \mathrm{B}$$

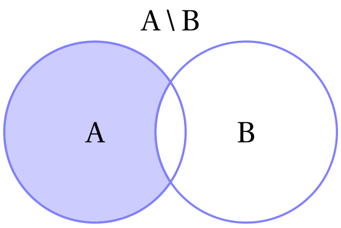


Par exemple,
si $\mathrm{A} = [1;3]$ et $\mathrm{B} = [-1;2]$, alors

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = [1;2]$

- On note $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ (lire A « privé de B »), l'ensemble des x tels que :

$$x \in \mathrm{A} \qquad \text{ET} \qquad x \notin \mathrm{B}$$



Par exemple,
si $\mathrm{A} = \{1;2;4;7\}$ et $\mathrm{B} = \{2;3;7;8;9\}$, alors

$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{1;4\}$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 1$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son domaine de définition et son expression.

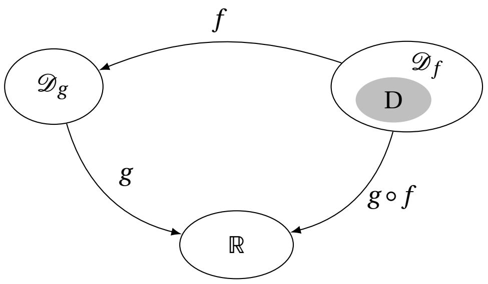
1. $f + g$
   f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc $f+g$ est définie sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$
2. fg
   f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc fg est définie sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$
3. $\dfrac{g}{f}$
   f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est définie sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$. Donc $\frac{g}{f}$ est définie sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ \setminus \{-1; 1\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

Définition 8 : Composition de fonctions

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$. La **composée** de f suivi de g, notée $g \circ f$, est définie pour les $x \in \mathscr{D}_f$ tels que $f(x) \in \mathscr{D}_g$ par :

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

On peut schématiser cette situation via le diagramme suivant :



avec $\mathrm{D} = \{x \in \mathscr{D}_f \mid f(x) \in \mathscr{D}_g\}$.

Exemples :

- Soit $f(x) = 3x - 4$ et $g(x) = x^2$. Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x-4) = (3x-4)^2$$

- Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est définie sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs,

$$x^2 + 1 \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant -1 \iff x \in \mathbb{R}$$

  Donc, $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Enfin,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$$

Méthode 3 : Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

- **Fonctions usuelles**
  - Une fonction polynomiale est définie sur $\mathbb{R}$.
  - Une fraction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}$ privé des valeurs qui annulent son dénominateur. En pratique, on résout ainsi l'équation « dénominateur =0 ».
  - La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$.
- **Fonctions quelconques**. On commence par déterminer la *forme* de l'expression (somme, produit, quotient, composée), puis
  - pour une somme ou un produit : déterminer l'ensemble de définition de chacun des termes/facteurs et prendre l'intersection de ces ensembles;
  - pour un quotient : prendre l'intersection des ensembles de définition respectifs du numérateur et du dénominateur et enlever encore les valeurs qui annulent le dénominateur;
  - pour une composée : déterminer l'ensemble de définition de la première fonction et exprimer la condition assurant que l'image de la première fonction est dans l'ensemble de définition de la seconde fonction.
    En particulier, une composée de la forme $\sqrt{f}$ est définie lorsque f l'est ET lorsque $f(x) \geqslant 0$.

Exemples : Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
   f est un polynôme donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \dfrac{2x+3}{4x-1}$
   g est une fraction rationnelle donc g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\text{V.I}\}$. De plus, les valeurs interdites sont les solutions de $4x-1=0 \iff 4x=1 \iff x=\frac{1}{4}$. Donc, g est définie sur /RR $\setminus \{\frac{1}{4}\}$.
3. $h(x) = 4x - 1 + \sqrt{x}$
   h est la somme de la fonction $x \mapsto 4x-1$ définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ donc h est définie sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ =$ /RR$_+$.
4. $i(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$
   i est le quotient de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et de la fonction $x \mapsto x$ définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en 0. Donc, i est définie sur $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+^*$
5. $j(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
   j est de la forme $\sqrt{f}$ avec $f(x) = x^2 - 5x + 6$. f est définie sur $\mathbb{R}$. Il nous reste à résoudre $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$. Pour cela, il nous faut établir le tableau de signe de $x^2 - 5x + 6$. Commençons par calculer le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

   On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

   Donc, j est définie sur $]-\infty;2] \cup [3;+\infty[$.

5. Fonction bijective

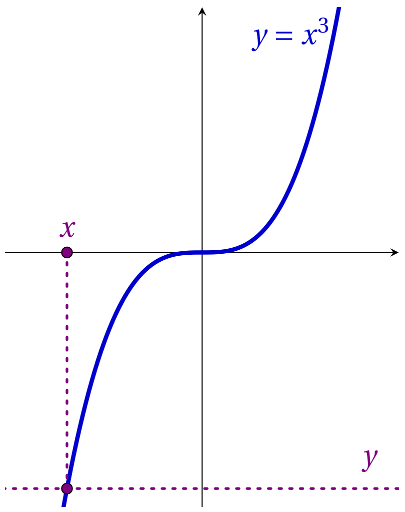
Définition 9 :

Soient I et J deux intervalles. On dit qu'une fonction f est une **bijection** de I dans J ou que $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ est **bijective** si les deux conditions suivantes sont réunies :

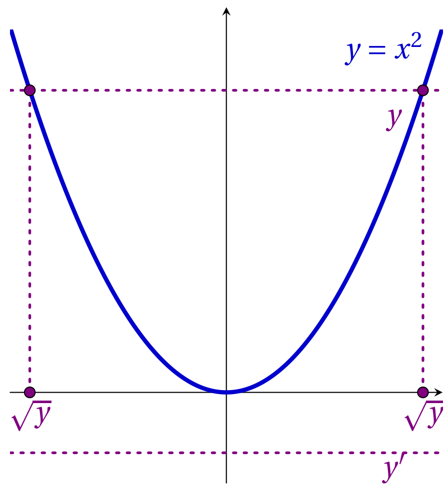
- pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{J}$
- pour tout $y \in \mathrm{J}$, il existe un unique $x \in \mathrm{I}$ tel que $f(x) = y$.

On peut alors définir une fonction appelée **bijection réciproque** ou **fonction réciproque** de f, notée f^{-1}, définie sur J et à valeurs dans I, et qui à un réel $y \in \mathrm{J}$ associe l'*unique* solution $x \in \mathrm{I}$ de l'équation $f(x) = y$:

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \forall y \in \mathrm{J}, \qquad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$



Pour la fonction cube $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^3$ dont la courbe est représentée ci-dessus, on observe graphiquement que tout élément y de $\mathbb{R}$ admet un unique antécédent x.
Autrement dit, pour toute ordonnée $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique abscisse $x \in \mathbb{R}$ telle que $y = x^3$.
f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



Pour la fonction carrée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ dont la courbe est représentée ci-dessus, la situation varie selon le signe de y. Graphiquement :

- tout $y > 0$ admet deux antécdents par $g : \pm\sqrt{y}$;
- tout $y < 0$ n'admet aucun antécédent.

Du fait de l'absence de l'unicité ou de l'existence pour les antécédents de y, la fonction carrée ne définit pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque : En revanche, $x \mapsto x^2$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple : $f(x) = 3x - 4$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6. Exercices

Images et antécédents

3.1

1. Sur la figure ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f
Déterminer graphiquement (aucune justification n'est demandée) :

   a. l'image de 3 par f

   b. $f(8)$ et $f(0)$

   c. l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5

   d. les éventuels antécédents de -7 par f

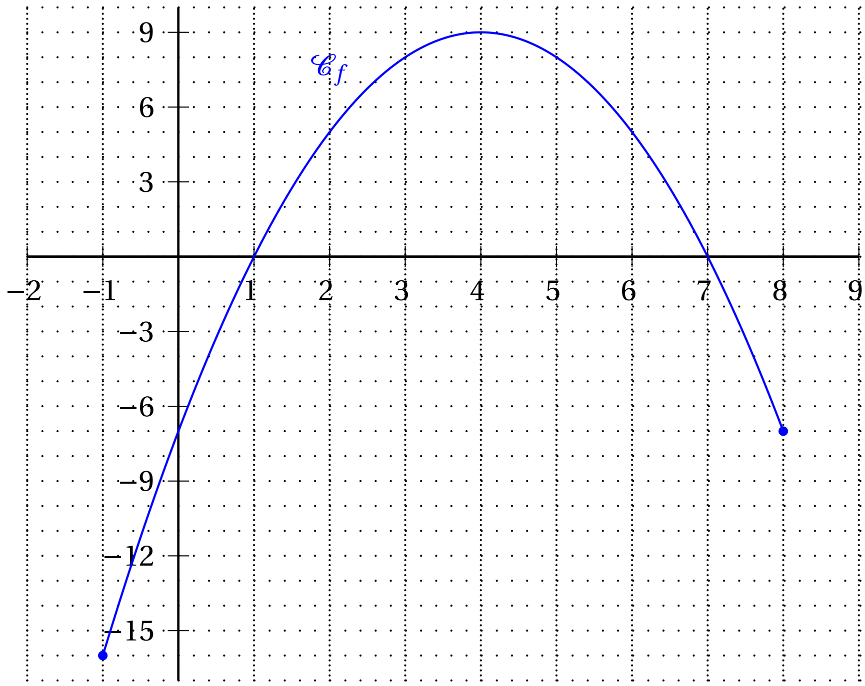
   e. les solutions de l'équation $f(x) = 0$

   f. le tableau de signes de f

   g. le tableau de variation de f

   h. le maximum de f et pour quelle valeur il est atteint

   i. la solution de l'inéquation $f(x) > 5$



2. Soit g la fonction définie sur $[-1;8]$ par $g(x) = (x-3)^2 - 16$

   a. Développer, réduire et ordonner $g(x)$

   b. Factoriser $g(x)$

   c. Déterminer algébriquement en utilisant la forme de $g(x)$ qui convient le mieux :

      i. l'image de 3 par g

      ii. x tel que $g(x) = 0$

      iii. les antécédents de -7 par g

   d. Donner un tableau de valeurs de le fonction g pour des valeurs allant de -1 à 8.

   e. Tracer $\mathscr{C}_g$ sur le graphique ci-dessus

   f. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$

3.2 Déterminer dans chacun des cas :

1. l'image de -2 ; 0 et 3 par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$;
2. l'image de -3 ; 0 et 1 par la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$ par $g(x) = \dfrac{4x+1}{2x-3}$;
3. l'image de -1 ; 0 et 3 par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x-5)(3x+1)$.

3.3 Déterminer dans chacun des cas, si c'est possible :

1. les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x$;
2. les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x + 1$;
3. les antécédents de 2 et 0 par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^2 + 1$;
4. les antécédents de 2 ; -1 et 0 par la fonction i définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ par $i(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$;
5. les antécédents de 5 et 1 par la fonction j définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2 + 5x + 5$.

Parité, monotonie et bornes

3.4 Soit $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est paire. Que peut-on en déduire sur sa représentation graphique ?

3.5 Étudier la parité de la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$;
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$;
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x$;
4. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$;
5. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$;
6. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$;
7. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$;

3.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Étudier la parité de f.
2. On admet que f est décroissante sur $[0;+\infty[$. En déduire, d'après la question précédente, le sens de variation de f sur $]-\infty;0]$. Dresser alors le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout réel x, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

3.7 Tracer une courbe susceptible de représenter graphiquement la fonction f, dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-3		0		2		4
$f(x)$	3	↘	0	↗	1	↘	-1

3.8 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ dont voici le tableau de variations. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. f est croissante sur $[-1;3]$;
2. f est décroissante sur $[2;+\infty[$;
3. $\forall x \in [0;2]$, $f(x) \leqslant 1$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant 3$;
5. $\exists x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) < 0$;
6. $\exists x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = 4$;
7. $f(2) \leqslant f(3)$;
8. $f(1) \geqslant f(2)$.

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	

3.9 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

1. Si f est croissante sur $[0;2]$, alors f est croissante sur $[0;1]$.
2. Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur $[0;1]$.
3. Si f a un maximum en 1 sur $[0;1]$, alors f est croissante sur $[0;1]$.
4. Si f n'est pas croissante sur $[0;1]$, alors f est décroissante sur $[0;1]$.

Composition de fonctions

3.10

1. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ pour les fonctions f et g définies de la façon suivante :
   a. $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = 3x + 2$;
   b. $f(x) = 1 - x^3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$;
   c. $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et $g(x) = x^2 + 2$.
2. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f \circ g \circ h$ pour les fonctions f, g et h définies de la façon suivante :
   a. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$ et $h(x) = x - 1$;
   b. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2 + 2$ et $h(x) = x + 3$.
3. Donner le domaine de définition des fonctions F suivantes et les mettre sous la forme $f \circ g$ où f et g sont à définir :
   a. $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$;
   b. $\mathrm{F}(x) = \sqrt{x^2+1}$.

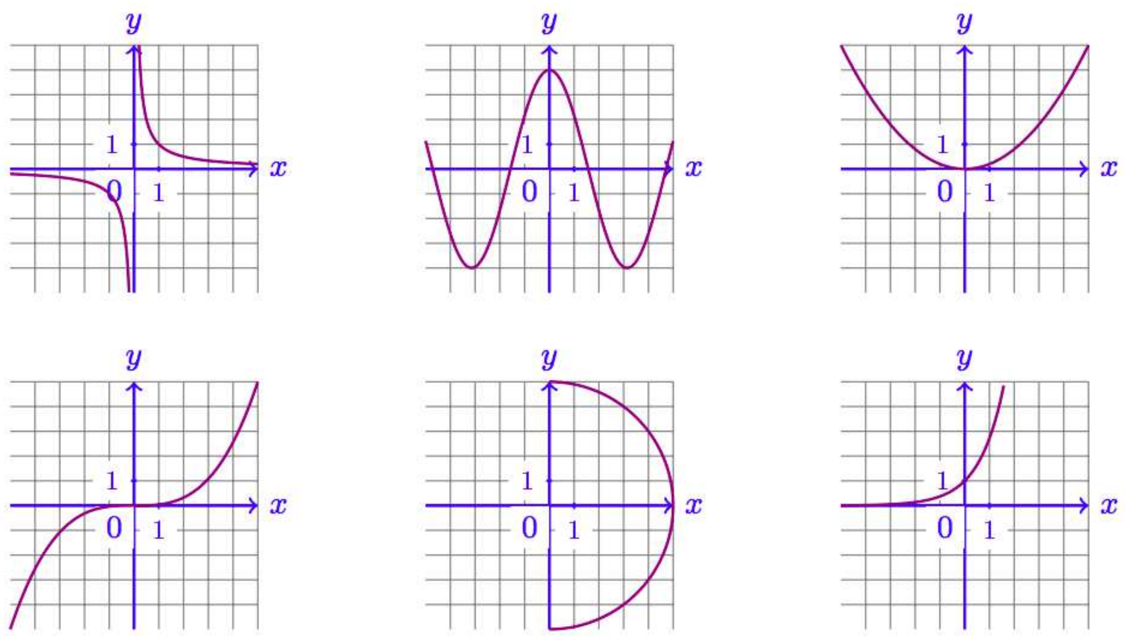
3.11 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $x^4 - 5x^2 + 2x + 1$
2. $x + \sqrt{x}$
3. $\dfrac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$
4. $\sqrt{x^2 + 3x - 10}$
5. $\dfrac{x+6}{x^2 + 5x + 1}$
6. $\sqrt{3x - 2}$
7. $\dfrac{8x^2 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6}$
8. $\sqrt{x^2 - 3x - 18}$
9. $\dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$
10. $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x^2 - 3x - 9}$
11. $\dfrac{x^2 + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$
12. $\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4x-1}}$
13. $\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$
14. $\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{8 - x^3}$

Bijection

3.12 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 4$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.13 Dites d'après le graphe, si les fonctions suivantes sont bijectives? On précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.



3.14 Soit $f : [1; +\infty[\to [0; +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective?

7. Corrigé des exercices

3.1

1. **a.** L'image de 3 par f est 8.
   b. $f(8) = -7$ et $f(0) = -7$
   c. L'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5 est 8
   d. Les antécédents de -7 par f sont 0 et 8.
   e. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 1 et 7.
   f. Le tableau de signes de f :

x	-1		1		7		8
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   g. Le tableau de variations de f :

x	-1		4		8
Variations de f	-16	↗	9	↘	-7

   h. Le maximum de f vaut 9 et il est atteint en $x = 4$.
   i. La solution de l'inéquation $f(x) > 5$ est : $\mathscr{S} =]2;6[$.

2. **a.** On a :

$$g(x) = (x-3)^2 - 16 = x^2 - 6x + 9 - 16 = x^2 - 6x - 7$$

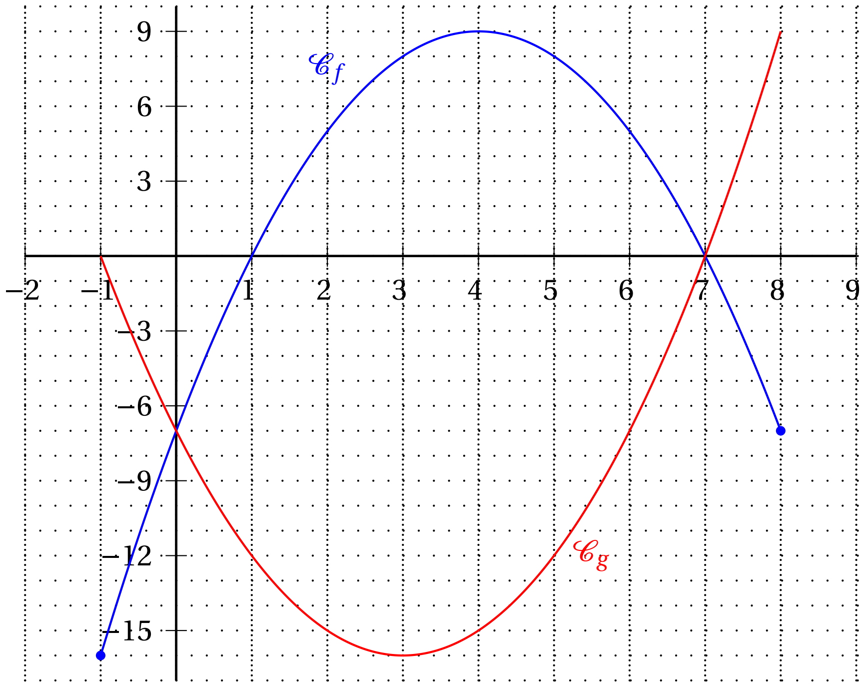
   b. $g(x)$ est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = x - 3$ et $b = 4$. Ainsi,

$$g(x) = (a-b)(a+b) = (x-3-4)(x-3+4) = (x-7)(x+1)$$

   c. **i.** On a $g(3) = (3-3)^2 - 16 = 0^2 - 16 = -16$.
   ii. On a $g(x) = 0 \iff (x-7)(x+1) = 0 \iff x - 7 = 0$ ou $x + 1 = 0 \iff x = 7$ ou $x = -1$. Ainsi, $\mathscr{S} = \{-1;7\}$.
   iii. On a $g(x) = -7 \iff x^2 - 6x - 7 = -7 \iff x^2 - 6x = 0 \iff x(x-6) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 6$. Ainsi, les antécédents de -7 par g sont 0 et 6.
   d. On a le tableau de valeurs suivants :

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	0	-7	-12	-15	-16	-15	-12	-7	0	9

   e. On obtient le graphique suivant :



f. Graphiquement, on a $f(x) = g(x) \iff x = -7$ ou $x = 7$. Ainsi, $\mathscr{S} = \{-7;7\}$.

3.2

1. On a :

$$f(-2) = 3\times(-2)^2 + 5\times(-2) + 1 = 3\times 4 - 10 + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$$

$$f(0) = 3\times 0^2 + 5\times 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$f(3) = 3\times 3^2 + 5\times 3 + 1 = 3\times 9 + 15 + 1 = 27 + 15 + 1 = 43$$

2. On a :

$$g(-3) = \frac{4\times(-3)+1}{2\times(-3)+1} = \frac{-12+1}{-6-3} = \frac{-11}{-9} = \frac{11}{9}$$

$$g(0) = \frac{4\times 0+1}{2\times 0-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

$$g(1) = \frac{4\times 1+1}{2\times 1-3} = \frac{5}{-1} = -5$$

3. On a :

$$h(-1) = (2\times(-1)-5)(3\times(-1)+1) = -7\times -2 = 14$$

$$h(0) = (2\times 0-5)(3\times 0+1) = -5\times 1 = -5$$

$$h(3) = (2\times 3-5)(3\times 3+1) = 1\times 10 = 10$$

3.3

1. On a :
   - Antécédent de 2 :

$$f(x) = 2 \iff -2x = 2 \iff x = \frac{2}{-2} = -1$$

   Donc, 2 a pour unique antécédent -1.
   - Antécédent de -1 :

$$f(x) = -1 \iff -2x = -1 \iff x = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

   Donc, -1 a pour unique antécédent $\frac{1}{2}$.
   - Antécédent de 0 :

$$f(x) = 0 \iff -2x = 0 \iff x = \frac{0}{-2} = 0$$

   Donc, 0 a pour unique antécédent 0.
2. On a :
   - Antécédent de 2 :

$$g(x) = 2 \iff 5x+1 = 2 \iff 5x = 1 \iff x = \frac{1}{5}$$

   Donc, 2 a pour unique antécédent $\frac{1}{5}$.
   - Antécédent de -1 :

$$g(x) = -1 \iff 5x+1 = -1 \iff 5x = -2 \iff x = -\frac{2}{5}$$

   Donc, -1 a pour unique antécédent $-\frac{2}{5}$.
   - Antécédent de 0 :

$$g(x) = 0 \iff 5x+1 = 0 \iff 5x = -1 \iff x = -\frac{1}{5}$$

   Donc, 0 a pour unique antécédent $-\frac{1}{5}$.
3. On a :
   - Antécédent de 2 :

$$h(x) = 2 \iff 2x^2+1 = 2 \iff 2x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{2} \iff x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

   Donc, 2 a deux antécédents : $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.
   - Antécédent de 0 :

$$h(x) = 0 \iff 2x^2+1 = 0 \iff 2x^2 = -1$$

   Or, un carré ne peut être négatif. Donc, 0 n'a pas d'antécédent par h.
4. On a :

- Antécédent de 2 :

$$i(x) = 2 \iff \frac{2x+1}{3x-2} = 2 \iff \frac{2x+1}{3x-2} - 2 = 0 \iff \frac{2x+1-2(3x-2)}{3x-2} = 0 \iff \frac{-4x+5}{3x-2} = 0$$

Il y a une unique valeur interdite $x = \frac{2}{3}$ (indiquée dans l'énoncé). Par ailleurs,

$$-4x+5 = 0 \iff -4x = -5 \iff x = \frac{5}{4}$$

Donc, 2 a pour unique antécédent $\frac{5}{4}$.

- Antécédent de -1 :

$$i(x) = -1 \iff \frac{2x+1}{3x-2} = -1 \iff \frac{2x+1}{3x-2} + 1 = 0 \iff \frac{2x+1+3x-2}{3x-2} = 0 \iff \frac{5x-1}{3x-2} = 0$$

Par ailleurs, $5x-1 = 0 \iff x = \frac{1}{5}$.

Donc, -1 a pour unique antécédent $\frac{1}{5}$.

- Antécédent de 0 :

$$i(x) = 0 \iff \frac{2x+1}{3x-2} = 0$$

Par ailleurs, $2x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$.

Donc, 0 a pour unique antécédent $-\frac{1}{2}$.

5. On a :

- Antécédent de 5 :

$$j(x) = 5 \iff x^2+5x+5 = 5 \iff x^2+5 = 0 \iff x(x+5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -5$$

Donc, 5 a deux antécédents : 0 et -5.

- Antécédent de 1 :

$$j(x) = 1 \iff x^2+5x+5 = 1 \iff x^2+5x+4 = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = 25-16 = 9$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-5-3}{2} = -4 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$$

Donc 1 a deux antécédents : -4 et -1.

3.4

1. La fonction f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2+1$. Pour déterminer l'ensemble de définition de f, il faut donc résoudre $u(x) \geqslant 0$. Or, il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2+1 \geqslant 0$. Donc,

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$$

Donc, f est paire. On en déduit que le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3.5

1. On a $f(-x) = 3 \times (-x) = -3x = -f(x)$ donc f est impaire.
2. On a $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ qui n'est ni égal à $f(x)$ ni à $-f(x)$. Donc, f n'est ni paire ni impaire.
3. On a $f(-x) = (-x)^3 - 2 \times (-x) = -x^3 + 2x$ et $-f(x) = -(x^3 - 2x) = -x^3 + 2x$. Donc, f est impaire.
4. On a $f(-x) = \sqrt{2 \times (-x)^2 + 3} = \sqrt{2x^2 + 3} = f(x)$ donc f est paire.
5. On a $f(-x) = \dfrac{3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{3}{x^2 - 4} = f(x)$. Donc, f est paire.
6. On a $f(-x) = \dfrac{1}{2 - (-x)} = \dfrac{1}{2 + x}$ qui n'est ni égal à $f(x)$ ni à $-f(x)$. Donc, f n'est ni paire ni impaire.
7. On a $f(-x) = 1 - \dfrac{1}{(-x)^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = f(x)$. Donc, f est paire.

3.6

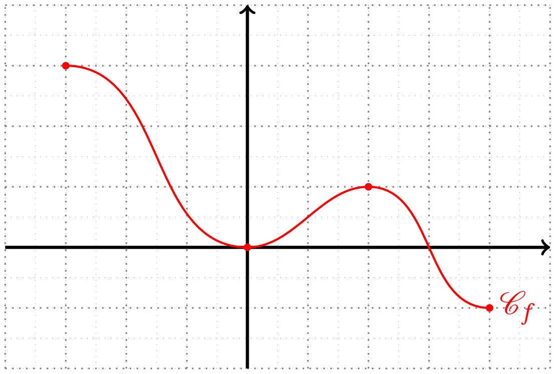
1. On a $f(-x) = \dfrac{1}{1 + (-x)^2} = \dfrac{1}{1 + x^2} = f(x)$. Donc, f est paire.
2. La fonction f étant paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Puisque f est décroissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que f est croissante sur $]-\infty; 0]$.
3. On a $f(0 = \dfrac{1}{1 + 0^2} = 1$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

On en déduit que pour tout x, $f(x) \leqslant 1$. Par ailleurs, il est clair que $f(x) \geqslant 0$. Ainsi,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

3.7 La courbe suivante convient :



3.8

1. FAUX. f est croissante sur $[0;2]$.
2. VRAI.
3. FAUX. Puisque $f(2) = 3$.
4. VRAI.
5. VRAI.
6. FAUX. Puisque le maximum de f est 3.
7. FAUX. Car f est décroissante sur $[2;+\infty[$.
8. FAUX. Car f est croissante $[0;2]$.

3.9

1. VRAI.
2. FAUX.
3. FAUX.
4. FAUX.

3.10

1. **a.** On a :

$$\begin{aligned} f\circ g(x) = f(g(x)) = f(3x+2) &= 2\times(3x+2)^2-(3x+2) \\ &= 2\times(9x^2+12x+4)-3x-2 \\ &= 18x^2+24x+8-3x-2 \\ &= 18x^2+21x+6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) = g(2x^2-x) = 3\times(2x^2-x)+2 \\ &= 6x^2-3x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\circ f(x) &= f(f(x)) = f(2x^2-x) \\ &= 2(2x^2-x)^2-(2x^2-x) \\ &= 2(4x^4-4x^3+x^2)-2x^2+x \\ &= 8x^4-8x^3+2x^2-2x^2+x \\ &= 8x^4-8x^3+x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ g(x) &= g(g(x)) = g(3x+2) \\ &= 3(3x+2)+2 \\ &= 9x+6+2 \\ &= 9x+8 \end{aligned}$$

Ces quatre fonctions sont des polynômes, donc

$$\mathscr{D}_{f\circ g} = \mathscr{D}_{g\circ f} = \mathscr{D}_{f\circ f} = \mathscr{D}_{g\circ g} = \mathbb{R}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) = f(\frac{1}{x}) \\ &= 1-\left(\frac{1}{x}\right)^3 \\ &= 1-\frac{1}{x^3} \\ &= \frac{x^3-1}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) = g(1-x^3) \\ &= \frac{1}{1-x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\circ f(x) &= f(f(x)) = f(1-x^3) \\ &= 1-(1-x^3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ g(x) &= g(g(x)) = g(\frac{1}{x}) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x}} \\ &= x \end{aligned}$$

$f\circ g$ est une fraction rationnelle. L'unique valeur interdite est $x=0$ donc

$$\mathscr{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$$

$g \circ f$ est une fraction rationnelle. L'unique valeur interdite est $x = 1$ donc

$$\mathscr{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$f \circ f$ est un polynôme donc

$$\mathscr{D}_{f \circ f} = \mathbb{R}$$

$g \circ g$ est un polynôme donc

$$\mathscr{D}_{g \circ g} = \mathbb{R}$$

c. On a :

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(x^2 + 2) \\ &= \sqrt{2(x^2+2)+3} \\ &= \sqrt{2x^2+4+3} \\ &= \sqrt{2x^2+7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(\sqrt{2x+3}) \\ &= (\sqrt{2x+3})^2 + 2 \\ &= 2x+3+2 \\ &= 2x+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) = f(\sqrt{2x+3}) \\ &= \sqrt{2\sqrt{2x+3}+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) = g(x^2 + 2) \\ &= (x^2+2)^2 + 2 \\ &= x^4 + 4x^2 + 4 + 2 \\ &= x^4 + 4x^2 + 6 \end{aligned}$$

$f \circ g$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 2x^2 + 7$. Pour trouver le domaine de $f \circ g$, il faut résoudre $2x^2 + 7$. Or, il est clair que $2x^2 + 7 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc

$$\mathscr{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

$g \circ f$ est un polynôme donc

$$\mathscr{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}$$

$f \circ f$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 2\sqrt{2x+3} + 3$. Il faut tout d'abord que u soit bien définie et que donc $2x + 3 \geqslant 0$, *i.e* $x \geqslant -\frac{3}{2}$. Ensuite, on a clairement $u(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant -\frac{3}{2}$. Ainsi,

$$\mathscr{D}_{f \circ f} = [-\frac{3}{2}; +\infty[$$

$g \circ g$ est un polynôme donc

$$\mathscr{D}_{g \circ g} = \mathbb{R}$$

2. a. On a :

$$\begin{aligned} f\circ g\circ h(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x-1)) \\ &= f(2(x-1)) \\ &= 2(x-1)+1 \\ &= 2x-2+1 \\ &= 2x-1 \end{aligned}$$

$f\circ g\circ h$ est un polynôme donc

$$\mathscr{D}_{f\circ g\circ h} = \mathbb{R}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} f\circ g\circ h(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x+3)) \\ &= f((x+3)^2+2) \\ &= f(x^2+6x+9+2) \\ &= f(x^2+6x+11) \\ &= \sqrt{x^2+6x+11-1} \\ &= \sqrt{x^2+6x+10} \end{aligned}$$

$f\circ g\circ h$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2+6x+10$ donc pour trouver le domaine de $f\circ g\circ h$, il nous faut résoudre $u(x) \geqslant 0$. Pour cela, on calcule $\Delta = 36-40 = -4$. Donc, pour tout x, $x^2+6x+10 > 0$. Ainsi,

$$\mathscr{D}_{f\circ g\circ h} = \mathbb{R}$$

3. a. F est une fraction rationnelle donc $\mathscr{D}_{\mathrm{F}} = \mathbb{R}\setminus\{\text{V.I}\}$. Les valeurs interdite sont les solutions de $x^2+4=0$. Or, $x^2+4=0 \iff x^2=-4$. Un carré n'étant jamais négatif, il n'y a pas de solution. Donc,

$$\mathscr{D}_{\mathrm{F}} = \mathbb{R}$$

Posons par ailleurs, $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+4}$. ALors, on a :

$$\mathrm{F} = g\circ f$$

b. F est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^1+1$. Pour trouver le domaine de F, il faut résoudre $x^2+1 \leqslant 0$. Or, il est clair que $x^2+1 \geqslant 0$ pour tout x donc

$$\mathscr{D}_{\mathrm{F}} = \mathbb{R}$$

Posons par ailleurs $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. Alors, on a :

$$\mathrm{F} = g\circ f$$

3.11

1. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2x + 1$ est un polynôme donc

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$$

2. $f(x) = x + \sqrt{x}$ est de la forme $u + v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a $\mathscr{D}_u = \mathbb{R}$ et $\mathscr{D}_v = \mathbb{R}_+$. Donc,

$$\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+$$

3. $f(x) = \dfrac{16x^2 - 2x + 8}{x^2 + 5x + 6}$ est une fraction rationnelle donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{V.I}\}$. Pour déterminer les valeurs interdites, on doit résoudre $x^2 + 5x + 6 = 0$.
On a $\Delta = 25 - 24 = 1$. On a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ainsi,

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$ est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 3x - 10$. Donc, pour déterminer le domaine de f, il faut résoudre $x^2 + 3x - 10 \geqslant 0$.
On a $\Delta = 9 + 40 = 49$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-3 - 7}{2} = -5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
Signe de $x^2 + 3x - 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\mathscr{D}_f =]-\infty; -5] \cup [2; +\infty[$$

5. $f(x) = \dfrac{x + 6}{x^2 + 5x + 1}$ est une fraction rationnelle donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{V.I}\}$. Pour déterminer les valeurs interdites, on calcule $\Delta = 25 - 4 = 21$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

Donc,

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \right\}$$

6. $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x - 2$. Pour déterminer le domaine de définition de f, il faut donc résoudre l'inéquation $u(x) \geqslant 0$. On a :

$$3x - 2 \geqslant 0 \iff 3x \geqslant 2 \iff x \geqslant \frac{3}{2}$$

Donc,

$$\mathscr{D}_f = [\frac{3}{2}; +\infty[$$

7. $f(x) = \dfrac{8x^2-5x+3}{x^2-5x+6}$ est une fraction rationnelle donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{V.I}\}$. Pour déterminer les valeurs interdites, on résout $x^2-5x+6=0$. On calcule $\Delta = 25-24 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Donc,

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2;3\}$$

8. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-18}$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2-3x-18$. Pour déterminer le domaine de définition de f, il faut résoudre $u(x) \geqslant 0$. On calcule donc $\Delta = 9+72 = 81$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{3-9}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{9+3}{2} = 6$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
Signe de $x^2-3x-18$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc,

$$\mathscr{D}_f =]-\infty;-3] \cup [6;+\infty[$$

9. $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ est de la forme $u+v$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Donc, $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v$. On a par ailleurs, $\mathscr{D}_u = \mathbb{R}^*$ et $\mathscr{D}_v = \mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$$

10. $f(x) = \sqrt{x+7}+\sqrt{2x^2-3x-9}$ est de la forme $u+v$ avec $u(x) = \sqrt{x+7}$ et $v(x) = \sqrt{2x^2-3x-9}$. Donc, $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v$.

- Domaine de u :
  On résout $x+7 \geqslant 0$. On a :
  $$x+7 \geqslant 0 \iff x \geqslant -7$$
  Donc,
  $$\mathscr{D}_u = [-7;+\infty[$$
- Domaine de v :
  On résout $2x^2-3x-9 \geqslant 0$. On a $\Delta = 9+72 = 81$. Il y a donc deux racines qui sont :
  $$x_1 = \frac{3-9}{4} = -\frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+9}{4} = 3$$
  On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $2x^2-3x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Donc,
  $$\mathscr{D}_v =]-\infty;-\frac{3}{2}] \cup [3;+\infty[$$

Conclusion :

$$\mathscr{D}_f = [-7;-\frac{3}{2}] \cup [3;+\infty[$$

11. $f(x) = \dfrac{x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2+5x-7$ et $v(x) = \sqrt{2x^2+3x-2}$ donc

$$\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v \setminus \{x\,;\, v(x)=0\}$$

- Domaine de u :
  u est un polynôme donc
  $$\mathscr{D}_u = \mathbb{R}$$
- Domaine de v :
  On résout $2x^2+3x-2 \geqslant 0$. On a $\Delta = 9+16 = 25$. Il y a donc deux racines qui sont :
  $$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$
  On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Donc,
  $$\mathscr{D}_v =]-\infty;-2] \cup [\frac{1}{2};+\infty[$$
- Solution de $v(x) = 0$:
  Les solutions de $v(x) = 0$ sont les x tels que $2x^2+3x-2 = 0$. On a déjà vu que les solutions de cette équation sont -2 et $\frac{1}{2}$.

Conclusion :

$$\mathscr{D}_f =]-\infty;-2[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$$

12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{4x-1}} = \sqrt{\dfrac{3-x}{4x-1}}$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = \dfrac{3-x}{4x-1}$. Pour déterminer le domaine de définition de u, il faut donc résoudre $u(x) \geqslant 0$. On a :

$$3-x = 0 \iff x = 3$$

$$4x-1 = 0 \iff 4x = 1 \iff x = \frac{1}{4}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{3-x}{4x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc,

$$\mathscr{D}_f =]\frac{1}{4};3]$$

13. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = \dfrac{2-x}{2+x}$. Pour déterminer le domaine de définition de u, il faut donc résoudre $u(x) \geqslant 0$. On a :

$$2 - x = 0 \iff x = 2$$

$$2 + x = 0 \iff x = -2$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{2-x}{2+x}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Donc,

$$\mathscr{D}_f =]2;2]$$

14. $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{8-x^3}$ est de la forme $u + v$ avec $u(x) = \sqrt{x+1}$ et $v(x) = 8 - x^3$ donc

$$\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_u \cap \mathscr{D}_v$$

- Domaine de u :
  Il nous faut résoudre $x + 1 \geqslant 0$. On a :

  $$x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$$

  Donc,

  $$\mathscr{D}_u = [-1;+\infty[$$

- Domaine de v :
  La fonction v est une fraction rationnelle ayant pour unique valeur interdite $x = 2$ donc

  $$\mathscr{D}_v = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Conclusion :

$$\mathscr{D}_f = [-1;2[\cup]2;+\infty[$$

3.12 Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \iff -3x + 4 = y \iff -3x = -4 + y \iff x = \frac{-4+y}{-3}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Donc, f est bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.13

1. f est une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.
2. f n'est pas une bjection de $\mathbb{R}$ dans $[-4;4]$.
3. f n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ mais est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$.
4. f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. f n'est pas une bijection (ce n'est même pas une fonction).
6. f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

3.14 Soit $y \in [0;+\infty[$ et $x \in [1;+\infty[$. On a :

$$f(x) = y \iff x^2 - 1 = y \iff x^2 = 1 + y \iff x = \sqrt{1+y}$$

Ainsi, pour tout $y \in [0;+\infty[$, il existe un unique $x \in [1;+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Donc, f est bien une bijection de $[1;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$.

---

8. Table des matières