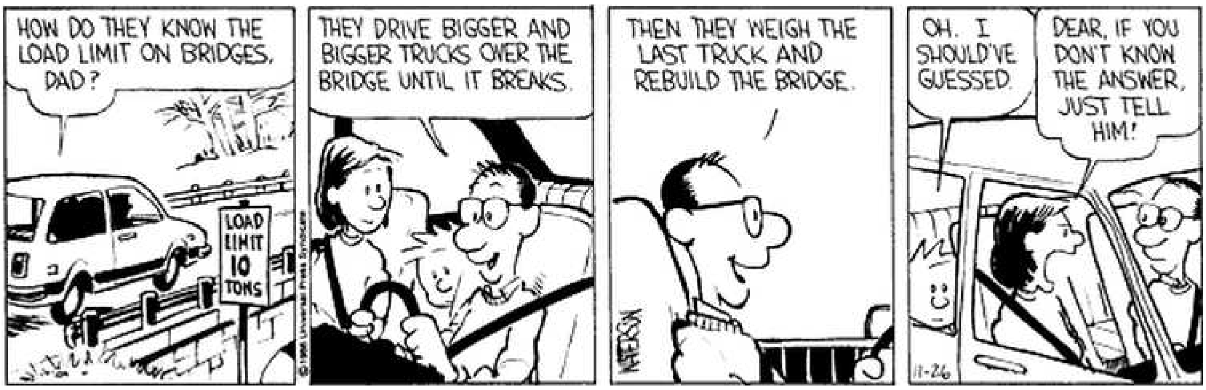
Cours de mathématiques
ECT 1ère année

Chapitre 2
Équations et inéquations



Adrien Fontaine

Année scolaire 2020–2021

1. Vocabulaire

Définition 1 : Équation

Une **équation** est un *problème* mettant en jeu une égalité du type :

$$f(x) = 0$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelé **inconnue** de l'équation. On dit que l'on **résout** cette équation lorsque l'on recherche l'ensemble des x tels que $f(x) = 0$.
On note généralement l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0\}$$

Exemple : Résoudre l'équation $2x + 7 = 0$:
$2x + 7 = 0 \iff 2x = -7 \iff x = -\frac{7}{2}$. Ainsi, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

Définition 2 : Inéquation

Une inéquation est un *problème* mettant en jeu une inégalité du type :

$$f(x) \geqslant 0 \quad (\text{ ou } \quad f(x) \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad f(x) > 0 \quad \text{ou} \quad f(x) < 0)$$

où f est une fonction à variable réelle et le réel x est appelée **inconnue** de l'équation. On dit que l'on **résout** cette inéquation lorsque l'on recherche l'ensemble des x tels que $f(x) \geqslant 0$ (ou $f(x) \leqslant 0$, ...).
On note généralement l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$:

$$\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \geqslant 0\}$$

Exemples :
- Résoudre l'inéquation $3x + 4 \geqslant 0$:
  $3x + 4 \geqslant 0 \iff 3x \geqslant -4 \iff x \geqslant -\frac{4}{3}$. Ainsi, $\mathscr{S} = [-\frac{4}{3}; +\infty[$.
- Résoudre l'inéquation $-3x + 5 > 0$:
  $-3x + 5 > 0 \iff -3x > -5 \iff x < \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$. Ainsi, $\mathscr{S} =]-\infty; \frac{5}{3}[$.

⚠ATTENTION !⚠

Lorsque l'on multiplie ou divise par un réel **négatif** dans une inégalité, na pas oublier de changer le sens de l'inégalité !

2. Équations de degré 1 : $ax+b=0$ avec $a\neq 0$

2.1. Résolution de l'équation $ax+b=0$

Proposition 1 :

Soient a et b deux réels avec $a\neq 0$. L'équation $ax+b=0$ admet pour unique solution :

$$x=\frac{-b}{a}$$

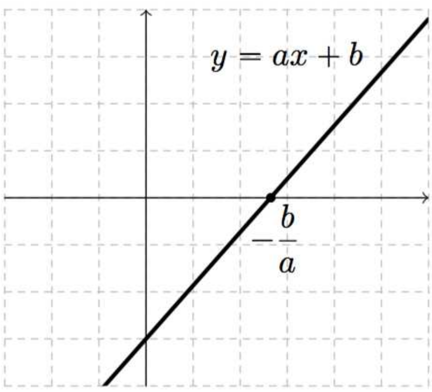
Preuve. $ax+b=0 \iff ax=-b \iff x=-\frac{b}{a}$ □

2.2. Signe de $ax+b$

L'expression $ax+b$ change de signe au point où elle s'annule. On a alors deux tableaux de signe, selon le signe de a :

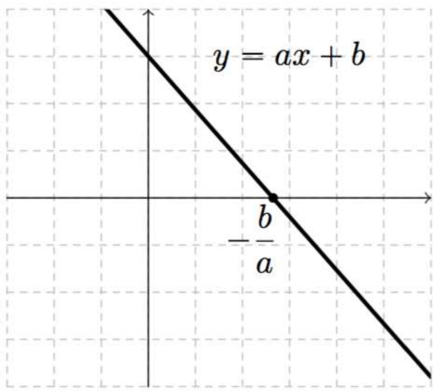
Cas $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $\boxed{a}x+b$		$-$	0	$+$	



Cas $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $\boxed{a}x+b$		$+$	0	$-$	



Preuve. On a $ax+b\geqslant 0 \iff ax\geqslant -b$. Il nous maintenant diviser par a et donc distinguer deux cas, selon le signe de a :

- **Cas** $a>0$: Dans ce cas, on peut écrire $ax\geqslant -b \iff x\geqslant -\frac{b}{a}$ et on a donc le tableau de signe ci-dessus.
- **Cas** $a>0$: Dans ce cas, il faut changer le sens de l'inégalité lorsque l'on diviser par a et on a donc $ax\geqslant -b \iff x\leqslant -\frac{b}{a}$ et on a donc le tableau de signe ci-dessus.

□

Remarque : Plutôt que d'apprendre par cœur ces résultats, il est vivement conseillé de savoir retrouver les résultats précédents à partir de la résolution de l'inéquation $ax+b\geqslant 0$ (par exemple) ou de la représentation graphique de la fonction $f: x\mapsto ax+b$.

Exemple : Donner le signe de l'expression $-2x+3$:

On a $-2x+3 \geqslant 0 \iff -2x \geqslant -3 \iff x \leqslant \frac{-3}{-2} \iff x \leqslant \frac{3}{2}$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-2x+3$		$+$	0	$-$	

3. Trinôme du second degré : ax^2+bx+c, avec $a \neq 0$

3.1. Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

Définition 3 : Discriminant

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** du trinôme du second degré ax^2+bx+c le nombre, noté Δ, défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème 1 :

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une unique solution réelle $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

- $x^2+2x+1=0$:
  On commence par calculer le discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 1 = 4-4 = 0$. Il y a donc une unique solution qui est :
  $$x_0 = \frac{-2}{2\times 1} = -1$$
- $x^2-5x+6=0$:
  On commence par calculer le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 6 = 25-24 = 1 > 0$. Il y a donc deux solutions :
  $$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$
- $x^2+x+1=0$:
  On commence par calculer le discriminant $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = 1-4 = -3 > 0$. Il n'y a donc pas de solution.

Proposition 2 : Factorisation du trinôme ax^2+bx+c

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. Trois cas sont possibles :
- Si $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser le trinôme ax^2+bx+c.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine double x_0 et on a :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$

- Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines x_1 et x_2 et on a :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Exemples : Factoriser les trinômes de l'exemple précédent.
- $x^2+2x+1 = (x-(-1))^2 = (x+1)^2$
- $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$
- x^2+x+1 ne peut pas être factorisé puisque son discriminant est négatif.

Remarque : Factoriser le trinôme ax^2+bx+c revient donc à déterminer ses racines et, réciproquement, on peut lire ses racines sur sa forme factorisée.

3.2. Signe du trinôme ax^2+bx+c

Le signe du trinôme ax^2+bx+c dépend :
- du signe de a ;
- du signe du discriminant Δ.

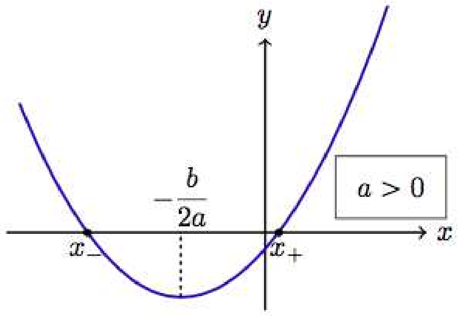
Dès lors, il y a 6 cas :
- Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		signe de a	|	signe de a	|	signe de a	
$x-x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

En résumé, on obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants :

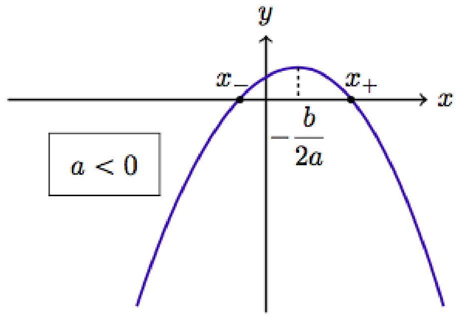
Cas $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	



Cas $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	



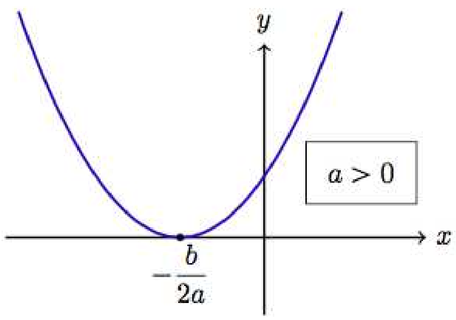
- Si $\Delta = 0$, on note x_0 la racine et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a		signe de a	$\vert$	signe de a	
$(x-x_0)^2$		$+$	0	$+$	
$a(x-x_0)^2$		signe de a	0	signe de a	

En résumé, on obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivants :

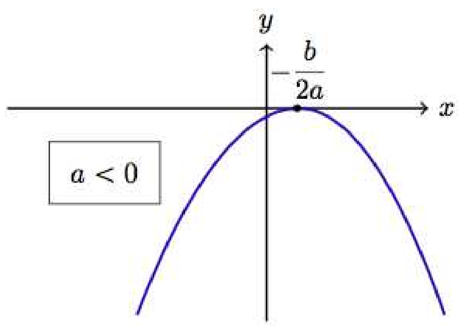
Cas $a > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		$+$	0	$+$	



Cas $a < 0$

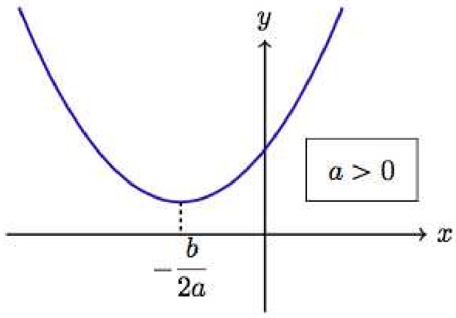
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		$-$	0	$-$	



- Si $\Delta < 0$, le signe de $ax^2 + bx + c$ est le même que celui de a. On obtient les tableaux de signe et représentations graphiques suivantes :

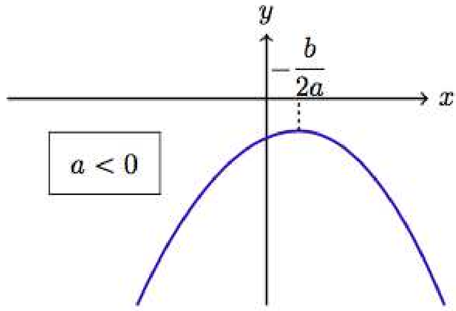
Cas $a > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	$+$



Cas $a < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	$-$



4. Polynômes

4.1. Polynômes de degré n

Définition 4 :

On appelle **polynôme de degré** n toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés les **coefficients** de P ;
- n s'appelle le **degré** de P et on écrit : $deg(P) = n$.

Exemples :

- $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ est un polynôme de degré 3 dont les coefficients sont 1, 2, -5 et 3.
- $Q(x) = x^4 + 1$ est un polynôme de degré 4 dont les coefficients sont 1, 0, 0, 0 et 1.
- $R(x) = -3$ est un polynôme de degré 0 dont l'unique coefficient est -3.

Il est possible d'additionner et de multiplier des polynômes :

- pour former la somme de deux polynômes P et Q, on regroupe les termes de même degré de P et Q ;
- pour former le produit de deux polynômes, il suffit de développer le produit littéral correspondant et de rassembler les termes de même degré.

Exemples : Soit $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$ et $Q(x) = -7x^3 + x^2 + \sqrt{2}$.

- $P(x) + Q(x) = 3x^2 - 5x + 2 - 7x^3 + x^2 + \sqrt{2} = -7x^3 + 4x^2 - 5x + 2 + \sqrt{2}$
- $$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (3x^2 - 5x + 2)(-7x^3 + x^2 + \sqrt{2}) \\ &= -21x^5 + 3x^4 + 3\sqrt{2}x^2 + 35x^4 - 5x^3 - 5\sqrt{2}x - 14x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2} \\ &= -21x^5 + 38x^4 - 19x^3 + (2 + 3\sqrt{2})x^2 - 5\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Proposition 3 : Égalité de deux polynômes

Soient P et Q deux polynômes. Alors P = Q, si et seulement si,
- $deg(\mathrm{P}) = deg(\mathrm{Q})$
- les coefficients des termes de même degré de P et Q sont égaux.

Exemple : Montrer que les deux polynômes $\mathrm{P}(x) = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ et $\mathrm{Q}(x) = x^4+1$ sont égaux.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x) &= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)\\
&= x^4-\sqrt{2}x^3+x^2+\sqrt{2}x^3-2x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x+1\\
&= x^4+1\\
&= \mathrm{Q}(x)
\end{aligned}$$

Définition 5 :

Un quotient de polynômes $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est appelé une **fraction rationnelle**.

Exemples :
- $\dfrac{x^2+1}{2x-3}$ est une fraction rationnelle.
- $\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+4}$ est une fraction rationnelle.
- $\dfrac{2}{x+3}$ est une fraction rationnelle.

4.2. Racine d'un polynôme

Définition 6 :

On appelle **racine** d'un polynôme P toute solution x_0 de l'équation $\mathrm{P}(x_0) = 0$

Exemples :
- 2 est une racine du polynôme $\mathrm{P}(x) = x^2-5x+6$ puisque $\mathrm{P}(2) = 2^2-5\times2+6 = 4-10+6 = 0$.
- $\dfrac{3}{2}$ est une racine du polynôme $\mathrm{Q}(x) = 2x-3$ puisque $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2\times\dfrac{3}{2}-3 = 3-3 = 0$.
- -2 est une racine du polynôme $\mathrm{Q}(x) = x^3+8$ puisque $\mathrm{Q}(-2) = (-2)^3+8 = -8+8 = 0$.

Remarque : Pour trouver des racines, on peut essayer de remplacer la variable x par -1, 1, 0, etc. Si on trouve 0, alors on dit que l'on a trouvé une « racine évidente. »

Théorème 2 :

Soit P un polynôme et α un réel. Alors, α est une racine de P, si et seulement si, il existe un polynôme Q tel que $\mathrm{P}(x) = (x-\alpha)\mathrm{Q}(x)$.

En pratique, il y a deux méthodes pour déterminer le polynôme Q :

- par identification des coefficients ;
- par division euclidienne.

On présente ces deux méthodes sur des exemples.

Méthode 1 : Identification des coefficients

On considère le polynôme f défini par : $f(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 + 11x + 6$

Une solution évidente est $x_0 = -1$

donc, il existe un polynôme g de degré $4 - 1 = 3$ tel que pour tout réel x :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x+1)g(x) \\ & = & (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ & = & ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ & = & ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b)x^2 + (d+c)x + d \end{array}$$

Les polynômes $3x^4 - x^3 + x^2 + 11x + 6$ et $ax^4 + (b+a)x^3 + (c+b)x^2 + (d+c)x + d$ sont égaux, leurs coefficients le sont aussi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b+a & = & -1 \\ c+b & = & 1 \\ d+c & = & 11 \\ d & = & 6 \end{array} \right. \qquad \text{donc :} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & -4 \\ c & = & 5 \\ d & = & 6 \end{array} \right.$$

Conclusion : $\boxed{f(x) = (x+1)(3x^3 - 4x^2 + 5x + 6)}$

Méthode 2 : Division euclidienne

On considère le polynôme f défini par : $f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$

Une solution évidente est $x_0 = 1$ donc, $f(x)$ est divisible par $(x-1)$

On effectue la division euclidienne de $f(x)$ par $(x-1)$ en utilisant les mêmes principes que pour la division des nombres

$$\begin{array}{ccccccccc|l} X^4 & - & 7X^3 & + & 17X^2 & - & 17X & + & 6 & X-1 \\ \cline{10-10} X^4 & - & X^3 & & & & & & & X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \\ \hline & - & 6X^3 & + & 17X^2 & - & 17X & + & 6 & \\ & - & 6X^3 & + & 6X^2 & & & & & \\ \cline{2-9} & & & + & 11X^2 & - & 17X & + & 6 & \\ & & & + & 11X^2 & - & 11X & & & \\ \cline{4-9} & & & & & - & 6X & + & 6 & \\ & & & & & - & 6X & + & 6 & \\ \cline{6-9} & & & & & & & & 0 & \end{array}$$

Conclusion : $\boxed{f(x) = (x-1)(3x^3 - 4x^2 + 5x + 6)}$

Exemple : On souhaite factoriser $\mathrm{P}(x)=x^3-7x+6$

1. Calculer $\mathrm{P}(2)$
   On a $\mathrm{P}(2)=2^3-7\times 2+6=8-14+6=0$.
2. Factoriser P de deux manières différentes.

Méthode 1 : Identification des coefficients

Il existe un polynôme Q de degré $3-1=2$ tel que pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x) &= (x-2)\mathrm{Q}(x)\\ &= (x-2)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c\\ &= ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c\end{aligned}$$

Les polynômes x^3-7x+6 et $ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$ sont égaux, leurs coefficients le sont aussi :

$$\begin{cases} a = 1\\ b-2a = 0\\ c-2b = -7\\ -2c = 6\end{cases} \quad \text{donc} : \quad \begin{cases} a = 1\\ b = 2\\ c = -3\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(x)=(x-2)(x^2+2x-3)}$

Méthode 2 : Division euclidienne

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & -\ 7x & +\ 6 & x-2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -\ 2x^2 & & & x^2+2x-3 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & -\ 7x & +\ 6 & \\
 & 2x^2 & -\ 4x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\ 3x & +\ 6 & \\
 & & -\ 3x & +\ 6 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(x)=(x-2)(x^2+2x-3)}$

5. Autres résolutions d'équations et d'inéquations

5.1. Équations produit

Théorème 3 :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=0 \Longleftrightarrow \mathrm{A}=0 \text{ ou } \mathrm{B}=0$$

Exemple : Résoudre l'équation $(x-1)(x+2)=0$

On a

$$\begin{aligned}(x-1)(x+2)=0 &\Longleftrightarrow x-1=0 \quad \text{ou} \quad x+2=0\\ &\Longleftrightarrow x=1 \quad \text{ou} \quad x=-2\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\{1;-2\}$.

Remarque : Grâce au théorème ci-dessus et aux différentes méthodes de factorisation vues précédemment, on peut résoudre certaines équations polynomiales de degré supérieures.

Méthode 1 : Résolution d'équation

Pour résoudre une équation du type $P(x) = 0$ avec P un polynôme de degré plus grand que 3 :

1. on commence par chercher une racine évidente α (à chercher parmi 0, ±1, ±2, etc) ;
2. factoriser P sous la forme $(x-\alpha)Q(x)$ (voir les deux méthodes « par identification » et « par division euclidienne »)
3. si $deg(Q) \leqslant 2$, on a terminé car on sait résoudre les équations de degré 1 ou 2 ;
4. sinon, on itère ce processus en cherchant une racine évidente de Q...

Exemple : Résolvons l'équation $x^3+3x^2-6x-8=0$.
Commençons par chercher une racine évidente de cette équation. On a :

$$(-1)^3+3\times(-1)^2-6\times-(1)-8=-1+3+6-8=0$$

Donc, -1 est une première racine de cette équation.
On cherche maintenant à factoriser le polynôme $P(x)=x^3+3x^2-6x-8$ par $(x-(-1))=x+1$.
On utilise la méthode par division euclidienne (par exemple) :

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & + & 3x^2 & - & 6x & - & 8 & x+1 \\ \cline{8-8}
x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+2x-8 \\ \cline{1-7}
 & & 2x^2 & - & 6x & - & 8 & \\
 & & 2x^2 & + & 2x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & 8x & - & 8 & \\
 & & & - & 8x & - & 8 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{P(x)=(x+1)(x^2+2x-8)}$

Il nous reste maintenant à déterminer les racines de x^2+2x-8. Le discriminant vaut $\Delta = 2^2-4\times1\times(-8)=4+32=36$. Il y a donc deux racines :

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{36}}{2\times1}=\frac{-2-6}{2}=-4 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-2+6}{2}=2$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\{-1;-4;2\}$.

5.2. Équations quotient

Théorème 4 :

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul :

$$\text{Si } B\neq 0, \qquad \frac{A}{B}=0 \Rightarrow A=0$$

Exemple : Résoudre l'équation $\dfrac{x+3}{\sqrt{2}}=0$:

On a $\dfrac{x+3}{\sqrt{2}}=0 \iff x+3=0 \iff x=-3$. Et donc, $\mathscr{S}=\{-3\}$.

Méthode 2 : Résolution d'une équation quotient

Avant de résoudre une équation quotient, on doit chercher les valeurs pour lesquelles le **dénominateur** s'annule. On appelle ces valeurs des « valeurs interdites ». On cherche ensuite les valeurs pour lesquelles le **numérateur** s'annule et on vérifie que les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Exemple : Résoudre l'équation $\frac{x^2-x}{x} = 0$.
On commence par chercher les valeurs interdites. Il n'y en a qu'une qui est $x = 0$.
On résout maintenant l'équation $x^2 - x = 0$. On a $x^2 - x = x(x-1)$. Il y a donc deux racines qui sont $x = 0$ et $x = 1$. Comme $x = 0$ est valeur interdite, on a donc :

$$\mathscr{S} = \{1\}$$

Remarque : Il est parfois nécéssaire de faire quelques calculs avant de se ramener à une équation quotient. Ainsi, si une equation contient plusieurs fractions rationnelles, on commence par réunir tous les termes dans un seul membre de l'équation et on met toutes les fractions au même dénominateur pour pouvoir les additionner et obtenir une seule fraction rationnelle.

Exemple : Résoudre l'équation $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{1}{x+2}$.
On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{1}{x+2} &\iff \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} + \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x+2} \\
&\iff \frac{x-3+2x-2}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{x+2} \\
&\iff \frac{3x-5}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{x+2} = 0 \\
&\iff \frac{(3x-5)(x+2)}{(x-1)(x-3)(x+2)} - \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+2)} = 0 \\
&\iff \frac{3x^2+6x-5x-10-(x^2-3x-x+3)}{(x-1)(x-3)(x+2)} = 0 \\
&\iff \frac{3x^2+6x-5x-10-x^2+3x+x-3}{(x-1)(x-3)(x+2)} = 0 \\
&\iff \frac{2x^2+5x-13}{(x-1)(x-3)(x+2)} = 0
\end{aligned}$$

Les valeurs interdites sont $x = 1$, $x = 3$ et $x = -2$.
On chercher maintenant à résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 13$. Le discriminant vaut : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-13) = 25 + 104 = 129$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{129}}{2 \times 2} = \frac{-5-\sqrt{129}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{129}}{4}$$

Aucune de ces deux solutions n'est valeur interdite. On a donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-5-\sqrt{129}}{4} ; \frac{-5+\sqrt{129}}{4} \right\}$$

5.3. Inéquations produits et inéquations quotient

Méthode 3 : Résoudre une inéquation polynomiale ou rationnelle

Le plan d'étude d'une inéquation polynomiale ou rationnelle est le suivant :

1. rassembler (par des additions/soustractions) l'ensemble des termes dans un même membre de l'inégalité ;
2. factoriser l'expression obtenue pour obtenir un produit ou un quotient de facteurs de degré 1 ou 2 ;
3. étudier le signe de chaque facteur ;
4. conclure après avoir fait la synthèse des signes des facteurs dans un tableau de signe.

Exemple : Résolvons l'inéquation $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x}<\frac{1}{x+7}$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x}<\frac{1}{x+7} &\iff \frac{x+3(x-2)}{x(x-2)}<\frac{1}{x+7}\\
&\iff \frac{4x-6}{x(x-2)}-\frac{1}{x+7}<0\\
&\iff \frac{(4x-6)(x+7)-x(x-2)}{x(x-2)(x+7)}<0\\
&\iff \frac{4x^2+28x-6x-42-x^2+2x}{x(x-2)(x+7)}<0\\
&\iff \frac{3x^2+24x-42}{x(x-2)(x+7)}<0
\end{aligned}$$

On étudie maintenant le signe de chacun des termes de $\dfrac{3x^2+24x-42}{x(x-2)(x+7)}$.

Calculons le discriminant de $3x^2+24x-42$. On a : $\Delta=24^2-4\times3\times(-42)=576+504=1080$.

Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-24-\sqrt{1080}}{2\times3}=\frac{-24-6\sqrt{30}}{6}=-4-\sqrt{30}\quad\text{et}\quad x_2=-4+\sqrt{30}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{30}$		-7		0		$-4+\sqrt{30}$		2		$+\infty$
$x+7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+24x-42$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Fraction		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Et donc,

$$\mathscr{S}=]-\infty;-4-\sqrt{30}[\cup]-7;0[\cup]-4+\sqrt{30};2[$$

6. EXERCICES

Degré 1

2.1 Parmi la liste de nombres $\left\{0; 1; \dfrac{3}{2}; 4\right\}$ lesquels sont solutions des équations suivantes :

1. $-x+1=0$.
2. $3x+4=6x-8$.
3. $x(2x-3)=0$.

2.2 Résoudre les équations suivantes.

1. $x-9=-4$.
2. $-x+5=12$.
3. $3x=-24$.
4. $3,7x=0$.
5. $\dfrac{1}{4}x=16$.
6. $5x-9=3x+4$.
7. $x-\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{4}$.
8. $\dfrac{3x}{4}=\dfrac{2}{3}$.
9. $\dfrac{4}{5}x+4=-\dfrac{2}{3}$.

2.3 Développer chaque membre, puis résoudre les équations obtenues.

1. $4x-5(3-2x)=4-(2x-7)$.
2. $9x-3(4-3x)=2-[35-3(4-2x)]$.
3. $7-3(4-2x)-5[2-3(x-5)]=4-3(x-4)$.
4. $4(x-2)-3[6-2(3-4x)]+3(7-2x)=0$.

2.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $2x+3>0$ et $3-5x\leqslant 0$.

Degré 2

2.5 Déterminer les solutions des équations :

1. $x^2-2x+1=0$
2. $x^2-1=0$
3. $x^2+1=0$
4. $4x^2+8x-5=0$
5. $3x^2+x+6=0$
6. $\dfrac{4}{9}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4}=0$
7. $2x^2-x-4=x^2+8$
8. $x(x-1)=-2(3x+7)$
9. $2x^3+5x^2-3x=0$

2.6 En effectuant le changement de variable $X=x^2$, résoudre les équations :

1. $x^4-13x^2+36=0$
2. $x^4-5x^2+4=0$
3. $9x^4-85x^2+196=0$
4. $x^4-x^2-2=0$
5. $x^2+\frac{1}{x^2}-6=0$

2.7 Soit m un nombre réel. On considère l'équation $4x^2+(m-1)x+1=0$.

1. Cette équation admet-elle une solution lorsque $m=1$?

2. Déterminer m pour que cette équation admette une unique solution. Déterminer cette solution.
3. Préciser les cas, en fonction de m, où cette équation admet deux solutions distinctes, et où cette équation n'admet aucune solution.

2.8 Étudier le signe de

1. $P(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $Q(x) = x^2 - 1$
3. $R(x) = x^2 + 1$
4. $S(x) = 3x^2 - 5x + 2$
5. $T(x) = 2x^2 + x + 3$
6. $U(x) = -x^2 + 4$

2.9 Résoudre les inéquations :

1. $x^2 - 2x + 1 > 0$
2. $-3x^2 + 5x - 2 \leqslant 0$
3. $x^2 - 4x - 4 \geqslant 0$
4. $-2x^2 + 5x \leqslant 2$
5. $3x^2 \geqslant 2x - 1$
6. $x(2x-5) \geqslant x - 6$
7. $\dfrac{-x^2}{3} + \dfrac{x}{3} \leqslant -1$
8. $4x^2 - 2x + 14 > 3x^2 + 4x + 5$
9. $4(x-1) > x(3x-4)$

Équations et inéquations produit

2.10 Résoudre les équations suivantes.

1. $(x-1)(x+2) = 0$.
2. $(2x+4)(3x-1) = 0$.
3. $(2+x)(2-3x) = 0$.
4. $-3(x-1) = 0$.
5. $(x+1)(3x-4)(2x-3) = 0$.
6. $\sqrt{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$.

2.11 Factoriser, puis résoudre les équations.

1. $(5x-2)(x+7) + (5x-2)^2 = 0$.
2. $-2(3x-5) + (x+7)(3x-5) = 0$.
3. $(2x+3)^2 - (x+5)(2x+3) = 0$.
4. $(3x-2)^2 - 81 = 0$.

2.12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(x-1)(-2x+4) \geqslant 0$.
2. $(2x-1)(x+3) < 0$.
3. $(x-1)(x^2 - 10x + 21) \geqslant 0$.
4. $(-3x-1)(x^2 - 2x + 1) < 0$.

Degré supérieur

2.13 Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$$

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.

2. En déduire une factorisation du polynôme P.

2.14 Soit P le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$$

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.

2. En déduire une factorisation du polynôme P.

2.15 Factoriser au maximum les polynômes :

1. $P(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

2. $Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$

3. $R(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

4. $S(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

5. $T(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$

6. $U(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 4x$

7. $V(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$

2.16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = 0$$

2.17 Soit f le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b à déterminer tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x^2 - 2)(x^2 + ax + b)$$

2. En déduire les racines de f.

2.18 Soit f le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^4 + 12x^3 + 18x^2 - 140x - 147$$

1. Vérifier que -1 et 3 sont des racines de f. En déduire qu'il existe un polynôme g tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x+1)(x-3)g(x)$$

2. Déterminer $g(x)$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Fractions rationnelles

2.19 Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{7}{x+1} = \dfrac{2}{x}$
2. $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{4}{x^2-4}$
3. $\dfrac{-2x-1}{x+1} = \dfrac{2x-3}{1-x}$
4. $\dfrac{3}{x} = \dfrac{x-1}{x+1}$
5. $2x = \dfrac{3x-5}{x-2}$
6. $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{1}{4}$

2.20 Soit $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$. Montrer que $f(x) \leqslant 8$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2.21 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{2x+3}{-x+1} \leqslant 0$.
2. $\dfrac{x^2-6x+8}{-x+3} \geqslant 0$.

7. Corrigé des exercices

2.1

1. -1 est solution car $-1+1=0$
2. 4 est solution car $3\times 4+4=12+4=16=6\times 4-8$
3. 0 est solution car $0\times(2\times 0-3)=0\times(-3)=0$.
   $\frac{3}{2}$ est également solution car $\frac{3}{2}\times\left(2\times\frac{3}{2}-3\right)=\frac{3}{2}\times(3-3)=\frac{3}{2}\times 0=0$.

2.2

1. $x-9=-4 \iff x=-4+9=5$
2. $-x+5=12 \iff -x=12-5=7 \iff x=-7$
3. $3x=-24 \iff x=-\frac{24}{3}=-8$
4. $3,7x=0 \iff x=\frac{0}{3,7}=0$
5. $\frac{1}{4}x=16 \iff x=16\times 4=64$
6. $5x-9=3x+4 \iff 5x-3x=4+9 \iff 2x=13 \iff x=\frac{13}{2}$
7. $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4} \iff x=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}$
8. $\frac{3x}{4}=\frac{2}{3} \iff x=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$
9. $\frac{4}{5}x+4=-\frac{2}{3} \iff \frac{4}{5}x=-\frac{2}{3}-4=-\frac{2}{3}-\frac{12}{3}=-\frac{14}{3} \iff x=-\frac{14}{3}\times\frac{5}{4}=-\frac{70}{12}=-\frac{35}{6}$

2.3

1. On a :

$$\begin{aligned}
4x-5(3-2x)=4-(2x-7) &\iff 4x-15+10x=4-2x+7\\
&\iff 14x-15=11-2x\\
&\iff 14x+2x=11+15\\
&\iff 16x=26\\
&\iff x=\frac{26}{16}=\frac{13}{8}
\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
9x-3(4-3x)=2-[35-3(4-2x)] &\iff 9x-12+9x=2-(35-12+6x)\\
&\iff 9x-12+9x=2-35+12-6x\\
&\iff 18x-12=-21-6x\\
&\iff 18x+6x=-21+12\\
&\iff 24x=-9\\
&\iff x=-\frac{9}{24}=-\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}7-3(4-2x)-5[2-3(x-5)]=4-3(x-4) &\iff 7-12+6x-5(2-3x+15)=4-3x+12\\ &\iff 7-12+6x-10+15x-75=16-3x\\ &\iff -90+21x=16-3x\\ &\iff 21x+3x=16+90\\ &\iff 24x=106\\ &\iff x=\frac{106}{24}=\frac{53}{12}\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}4(x-2)-3[6-2(3-4x)]+3(7-2x)=0 &\iff 4x-8-3(6-6+8x)+21-6x=0\\ &\iff 4x-8-18+18-24x+21-6x=0\\ &\iff -26x+13=0\\ &\iff -26x=-13\\ &\iff x=\frac{-13}{-26}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.4

- On a $2x+3>0 \iff 2x>-3 \iff x>\frac{-3}{2}$ donc $\mathscr{S}=]-\frac{3}{2};+\infty[$.
- On a $3-5x\leqslant 0 \iff -5x\leqslant -3 \iff x\geqslant \frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$ donc $\mathscr{S}=[\frac{3}{5};+\infty[$.

2.5

1. On commence par calculer le discriminant : $\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 1=4-4=0$. Il y a donc une seule solution qui est :

$$x_0=-\frac{(-2)}{2\times 1}=\frac{2}{2}=1$$

2. On calcule le discriminant : $\Delta=0^2-4\times 1\times(-1)=4$. Il y a donc deux solutions qui sont :

$$x_1=\frac{-0-\sqrt{4}}{2\times 1}=\frac{-2}{2}=-1 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-0+\sqrt{4}}{2\times 1}=\frac{2}{2}=1$$

Donc, $\mathscr{S}=\{-1;1\}$.
Autre méthode : On peut aussi écrire $x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff x=1$ ou $x=-1$. Ainsi, on retrouve bien $\mathscr{S}=\{-1;1\}$.

3. On calcule le discriminant : $\Delta=0^2-4\times 1\times 1=-4<0$. Il n'y a donc pas de solution : $\mathscr{S}=\emptyset$.
Autre méthode : On peut aussi écrire $x^2+1=0 \iff x^2=-1$. Or, un carré n'est jamais négatif. Il n'y a donc pas de solution : $\mathscr{S}=\emptyset$.

4. On calcule le discriminant : $\Delta=8^2-4\times 4\times(-5)=64+80=144>0$. Il y a donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-8-\sqrt{144}}{2\times 4}=\frac{-8-12}{8}=-\frac{20}{8}=-\frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-8+12}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left\{-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

5. On calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 6 = 1 - 72 = -71 < 0$. Il n'y a donc pas de solution : $\mathscr{S} = \emptyset$.

6. On calcule le discriminant : $\Delta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{9} - \frac{4}{9} = 0$. Il y a donc une solution :
$$x_0 = -\frac{\frac{2}{3}}{2 \times \frac{4}{9}} = -\frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = -\frac{3}{4}$$
Ainsi, $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

7. On a : $2x^2 - x - 4 = x^2 + 8 \iff x^2 - x - 12 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49$. Il y a donc deux solutions :
$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 1} = \frac{1-7}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$$
Ainsi, $\mathscr{S} = \{-3; 4\}$.

8. On a : $x(x-1) = -2(3x+7) \iff x^2 - x = -6x - 14 \iff x^2 + 5x + 14 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 14 = 25 - 56 = -31 < 0$.

9. On a : $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0 \iff x(2x^2 + 5x - 3) = 0 \iff x = 0$ ou $2x^2 + 5x - 3 = 0$. On calcule le discriminant de la deuxième équation : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$. Il y a donc deux autres solutions qui sont :
$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5-7}{4} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
Ainsi, $\mathscr{S} = \left\{0; -3; \frac{1}{2}\right\}$.

2.6 Pour toutes les équations ci-dessous, on pose $X = x^2$.

1. On a : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \iff X^2 - 13X + 36 = 0$. On est donc ramené à une équation de degré 2 en X. On calcule le discriminant : $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 1 \times 36 = 25$. Il y a donc deux solutions (pour X) :
$$X_1 = \frac{13-5}{2} = 4 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{13+5}{2} = 9$$
Par ailleurs, on a $X = 4 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$. De même, on a $X = 9 \iff x = 3$ ou $x = -3$. Ainsi,
$$\mathscr{S} = \{-2; 2; -3; 3\}$$

2. On a : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \iff X^2 - 5X + 4 = 0$. On est donc ramené à une équation de degré 2 en X. On calcule le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il y a donc deux solutions (pour X) :
$$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$
Par ailleurs, on a $X = 1 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$. De même, on a $X = 4 \iff x = 1$ ou $x = -1$. Ainsi,
$$\mathscr{S} = \{-1; 1; -2; 2\}$$

3. On a : $9x^4-85x^2+196=0 \iff 9X^2-85X+196=0$. On est donc ramené à une équation de degré 2 en X. On calcule le discriminant : $\Delta=(-85)^2-4\times9\times196=169$. Il y a donc deux solutions (pour X) :

$$X_1=\frac{85-13}{18}=4 \qquad \text{et} \qquad X_2=\frac{85+13}{18}=\frac{49}{9}$$

Par ailleurs, on a $X=4 \iff x^2=4 \iff x=2$ ou $x=-2$. De même, on a $X=\frac{49}{9} \iff x=\frac{7}{3}$ ou $x=-\frac{7}{3}$. Ainsi,

$$\mathscr{S}=\left\{-2;2;-\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right\}$$

4. On a : $x^2+\frac{1}{x^2}-6=0 \iff x^4+x^2-6=0 \iff X^2+X-6=0$. On est donc ramené à une équation de degré 2 en X. On calcule le discriminant : $\Delta=(1)^2-4\times1\times(-6)=25$. Il y a donc deux solutions (pour X) :

$$X_1=\frac{-1-5}{2}=-3 \qquad \text{et} \qquad X_2=\frac{-1+5}{2}=2$$

Par ailleurs, on a $X=-3 \iff x^2=-3$ ce qui n'est pas possible puisqu'un carré est toujours positif. Et $X=2 \iff x^2=2 \iff x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$. Ainsi,

$$\mathscr{S}=\left\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\right\}$$

2.7

1. Si $m=1$ alors l'équation $4x^2+(m-1)x+1=0$ devient $4x^2+1=0$. Le discriminant vaut $\Delta=0^2-4\times4\times1=-16<0$. Il n'y a donc pas de solution.
2. Pour que cette équation admette une unique solution, il faut que son discriminant $\Delta=(m-1)^2-4\times4\times1=(m-1)^2-16$ soit égal à 0. Or,

$$(m-1)^2-16=0 \iff m^2-2m+1-16=0 \iff m^2-2m-15=0$$

Calculons le discriminant de cette équation : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-15)=64$. Il y a donc deux solutions :

$$m_1=\frac{2-8}{2}=-3 \qquad \text{et} \qquad m_2=\frac{2+8}{2}=5$$

3. D'après les calculs de la question précédente, on peut en déduire le signe de $m^2-2m-15$ en fonction du signe de m :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
Signe de $m^2-2m-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,pour $m\in]-\infty;-3[\cup]5;+\infty$, il y a deux solutions.
Pour $m=-3$ et $m=5$, il y a une unique solution.
Pour $m\in]-3;5[$, il n'y a pas de solution.

2.8

1. On commence par calculer le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$. Il y a donc une racine qui est :
$$x_0 = -\frac{(-2)}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $x^2 - 2x + 1$		$+$	0	$+$	

2. On commence par calculer le discriminant : $\Delta = (0)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 0 + 4 = 4$. Il y a donc deux racines :
$$x_1 = \frac{-0 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = -\frac{2}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2}{2} = 1$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On commence par calculer le discriminant : $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4$. Il n'y a donc pas de racine. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $x^2 + 1$		$+$	

4. On commence par calculer le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :
$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $3x^2 - 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. On commence par calculer le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23 < 0$. Il n'y a donc pas de racine. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $2x^2+x+3$	$+$

6. On commence par calculer le discriminant : $\Delta = 0^2 - 4\times(-1)\times 4 = 16$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-0-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4}{-2} = -2$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de $-x^2+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.9

1. On a déjà établi le tableau de signe de x^2-2x+1 à l'exercice précédent :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de x^2-2x+1		$+$	0	$+$	

Ainsi, on en déduit que $x^2-2x+1>0 \iff x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donc,

$$\mathscr{S} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

2. On a $-3x^2+5x-2\leqslant 0 \iff 3x^2-5x+2\geqslant 0$. Or, on a déjà établi à l'exercice précédent le tableau de signe de $3x^2-5x+2$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $3x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $3x^2-5x+2\geqslant 0 \iff x\in]-\infty;\frac{2}{3}]\cup[1;+\infty[$. Donc,

$$\mathscr{S} =]-\infty;\frac{2}{3}]\cup[1;+\infty[$$

3. On commence par établir le tableau de signe de x^2-4x-4. Pour cela, on calcule le discriminant : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times(-4)=16+16=32$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{32}}{2} = 2-2\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4+\sqrt{32}}{2} = 2+2\sqrt{2}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$ $\quad 2-2\sqrt{2} \quad 2+2\sqrt{2} \quad$ $+\infty$
Signe de x^2-4x-4	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

Ainsi,

$$\mathscr{S} =]-\infty; 2-2\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}; +\infty[$$

4. On a $-2x^2+5x \leqslant 2 \iff -2x^2+5x-2 \leqslant 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 25 - 16 = 9$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-5-3}{-4} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5+3}{-4} = \frac{1}{2}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad +\infty$
Signe de x^2-4x-4	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

Ainsi,

$$\mathscr{S} =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty[$$

5. On a $3x^2 \geqslant 2x-1 \iff 3x^2-2x+1 \geqslant 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 4-12 = -8$. Il n'y a donc pas de racine. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty \quad +\infty$
Signe de $3x^2-2x+1$	$+$

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \mathbb{R}$$

6. On a $x(2x-5) \geqslant x-6 \iff 2x^2-5x \geqslant x-6 \iff 2x^2-6x+6 \geqslant 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 36-48 = -12$. Il n'y a donc pas de racine. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty \quad +\infty$
Signe de $2x^2-6x+6$	$+$

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \mathbb{R}$$

7. On a : $\dfrac{-x^2}{3} + \dfrac{x}{3} \leqslant -1 \iff \dfrac{-1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1 \leqslant 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \dfrac{13}{9}$. Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{13}{9}}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{13}$		$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$		$+\infty$
Signe de $\frac{-1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} =]-\infty; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}; +\infty[$$

8. On a $4x^2 - 2x + 14 > 3x^2 + 4x + 5 \iff x^2 - 6x + 9 > 0 \iff (x-3)^2 > 0$. Ainsi,

$$\mathscr{S} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

9. On a $4(x-1) > x(3x-4) \iff 4x - 4 > 3x^2 - 4x \iff -3x^2 + 8x - 4 > 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 8^2 - 4 \times (-3) \times (-4) = 16$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-8-4}{-6} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-8+4}{-6} = \frac{2}{3}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
Signe de $-3x^2+8x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} = [\frac{2}{3}; 2]$$

2.10

1. On a :

$$\begin{aligned}(x-1)(x+2) &\iff x-1=0 \text{ ou } x+2=0\\ &\iff x=1 \text{ ou } x=-2\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S} = \{1; -2\}$.

2. On a :

$$\begin{aligned}(2x+4)(3x-1) &\iff 2x+4=0 \text{ ou } 3x-1=0\\ &\iff x=-2 \text{ ou } x=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S} = \{\frac{1}{3}; -2\}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}(2+x)(2-3x) &\iff 2+x=0 \text{ ou } 2-3x=0\\ &\iff x=-2 \text{ ou } x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S} = \{\frac{2}{3}; -2\}$.

4. On a :

$$\begin{aligned} -3(x-1) &\iff x-1=0 \\ &\iff x=1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\{1\}$.

5. On a :

$$\begin{aligned} (x+1)(3x-4)(2x-3) &\iff x+1=0 \text{ ou } 3x-4=0 \text{ ou } 2x-3=0 \\ &\iff x=-1 \text{ ou } x=\frac{4}{3} \text{ ou } x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left\{-1;\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right\}$.

6. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) &\iff x-1=0 \text{ ou } x-2=0 \text{ ou } x-3=0 \text{ ou } x-4=0 \text{ ou } x-5=0 \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=2 \text{ ou } x=3 \text{ ou } x=4 \text{ ou } x=5 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\{1;2;3;4;5\}$.

2.11

1. On a :

$$\begin{aligned} (5x-2)(x+7)+(5x-2)^2=0 &\iff (5x-2)(x+7+5x-2)=0 \\ &\iff (5x-2)(6x+5)=0 \\ &\iff 5x-2=0 \text{ ou } 6x+5=0 \\ &\iff x=\frac{2}{5} \text{ ou } x=-\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left\{\frac{2}{5};-\frac{5}{6}\right\}$.

2. On a :

$$\begin{aligned} -2(3x-5)+(x+7)(3x-5)=0 &\iff (3x-5)(-2+x+7)=0 \\ &\iff (3x-5)(x+5)=0 \\ &\iff 3x-5=0 \text{ ou } x+5=0 \\ &\iff x=\frac{5}{3} \text{ ou } x=-5 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left\{\frac{5}{3};-5\right\}$.

3. On a :

$$\begin{aligned} (2x+3)^2-(x+5)(2x+3)=0 &\iff (2x+3)(2x+3-x-5)=0 \\ &\iff (2x+3)(x-2)=0 \\ &\iff 2x+3=0 \text{ ou } x-2=0 \\ &\iff x=-\frac{3}{2} \text{ ou } x=2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$.

4. On a :

$$\begin{aligned}(3x-2)^2-81=0 &\iff (3x-2-9)(3x-2+9)=0\\ &\iff (3x-11)(3x+7)=0\\ &\iff 3x-11=0 \text{ ou } 3x+7=0\\ &\iff x=\frac{11}{3} \text{ ou } x=-\frac{7}{3}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left\{\frac{11}{3};-\frac{7}{3}\right\}$.

2.12

1. On commence par établir le tableau de signes de l'expression $(x-1)(-2x+4)$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
Produit $(x-1)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi,

$$\mathscr{S}=[1;2]$$

2. On commence par établir le tableau de signes de l'expression $(2x-1)(x+3)$:

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit $(2x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\mathscr{S}=]-3;\frac{1}{2}[$$

3. Calculons le discriminant de l'expression $x^2-10x+21$. On a $\Delta=100-84=16$. Ainsi, l'équation $x^2-10x+21=0$ admet deux solutions :

$$x_1=\frac{10-4}{2}=3 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{10+4}{2}=7$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		3		7		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2-10x+21$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Produit $(x-1)(x^2-10x+21)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} = [1;3] \cup [7;+\infty[$$

4. Calculons le discriminant de l'expression x^2-2x+1. On a $\Delta = 4-4 = 0$. Ainsi, l'équation $x^2-10x+21 = 0$ admet une unique solution :

$$x_0 = \frac{2}{2} = 1$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$-3x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$x^2-2x+21$		$+$		$+$	0	$+$	
Produit $(-3x-1)(x^2-2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} =]-\frac{1}{3};1[\cup]1;+\infty[$$

2.13

1. On a :

$$\mathrm{P}(2) = 8-28+22-2 = 0$$

Ainsi, 2 est racine de P.

2. On peut donc factoriser P par $x-2$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\ 7x^2 & +\ 11x & -\ 2 & x-2 \\
\cline{5-5}
x^3 & -\ 2x^2 & & & x^2-5x+1 \\
\hline
 & -\ 5x^2 & +\ 11x & -\ 2 & \\
 & -\ 5x^2 & +\ 10x & & \\
\cline{2-4}
 & & x & -\ 2 & \\
 & & x & -\ 2 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(x) = (x-2)(x^2-5x+1)}$

2.14

1. On a :

$$\mathrm{P}(2) = 16 + 8 - 12 - 8 - 4 = 0$$

Ainsi, 2 est racine de P.

2. On peut donc factoriser P par $x - 2$:

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
x^4 & + & x^3 & - & 3x^2 & - & 4x & - & 4 & x-2 \\ \cline{10-10}
x^4 & - & 2x^3 & & & & & & & x^3+3x^2+3x+2 \\ \cline{1-9}
 & & 3x^3 & - & 3x^2 & - & 4x & - & 4 & \\
 & & 3x^3 & - & 6x^2 & & & & & \\ \cline{3-9}
 & & & + & 3x^2 & - & 4x & - & 4 & \\
 & & & + & 3x^2 & - & 6x & & & \\ \cline{4-9}
 & & & & & & 2x & - & 4 & \\
 & & & & & & 2X & - & 4 & \\ \cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{f(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}$

Remarque : on pouvait également voir que -2 est racine de P et donc factoriser par $x + 2$.

2.15

1. On commence par chercher une racine évidente. On a :

$$\mathrm{P}(1) = 1^3 + 7 \times 1^2 + 7 \times 1 - 15 = 0$$

Donc 1 est racine. On peut donc factoriser P par $x - 1$:

$$\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & + & 7x^2 & + & 7x & - & 15 & x-1 \\ \cline{8-8}
x^3 & - & x^2 & & & & & x^2+8x+15 \\ \cline{1-7}
 & & 8x^2 & + & 7x & - & 15 & \\
 & & 8x^2 & - & 8x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & 15x & - & 15 & \\
 & & & & 15x & - & 15 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $\mathrm{P}(x) = (x-1)(x^2 + 8x + 15)$.
Cherchons désormais à factoriser $x^2 + 8x + 15$. On calcule pour cela le discriminant : $\Delta = 64 - 60 = 4$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-8-2}{2} = -5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-8+2}{2} = -3$$

Ainsi,

$$x^2+8x+15=(x+5)(x+3)$$

Et donc,

$$\boxed{P(x)=(x-1)(x+5)(x+3)}$$

2. On commence par chercher une racine évidente. On a :

$$Q(-1)=6\times(-1)^3+7\times(-1)^2-(-1)-2=-6+7+1-2=0$$

Donc -1 est racine. On peut donc factoriser Q par $x+1$:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
6x^3 & + & 7x^2 & - & x & - & 2 & x+1 \\ \cline{8-8}
6x^3 & + & 6x^2 & & & & & 6x^2+x-2 \\ \cline{1-7}
 & & x^2 & - & x & - & 2 & \\
 & & x^2 & + & x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & 2x & - & 2 & \\
 & & & - & 2x & - & 2 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $Q(x)=(x+1)(6x^2+x-2)$.
Cherchons désormais à factoriser $6x^2+x-2$. On calcule pour cela le discriminant : $\Delta=1+48=49$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-1-7}{12}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-1+7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$6x^2+x-2=6(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{2})$$

Et donc,

$$\boxed{Q(x)=6(x+1)(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{2})}$$

3. On commence par chercher une racine évidente. On a :

$$R(1)=1^3-2\times1^2-11\times1+12=0$$

Donc 1 est racine. On peut donc factoriser P par $x-1$:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & - & 2x^2 & - & 11x & + & 12 & x-1 \\ \cline{8-8}
x^3 & - & x^2 & & & & & x^2-x-12 \\ \cline{1-7}
 & - & x^2 & - & 11x & + & 12 & \\
 & - & x^2 & + & x & & & \\ \cline{2-7}
 & & & - & 12x & + & 12 & \\
 & & & - & 12x & + & 12 & \\ \cline{4-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $P(x) = (x-1)(x^2-x-12)$.
Cherchons désormais à factoriser x^2-x-12. On calcule pour cela le discriminant : $\Delta = 1+48 = 49$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{1-7}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+7}{2} = 4$$

Ainsi,

$$x^2-x-12 = (x+3)(x-4)$$

Et donc,

$$\boxed{P(x) = (x-1)(x+3)(x-4)}$$

4. On commence par chercher une racine évidente. On a :

$$S(1) = 1^4 - 1^3 - 7\times 1^2 + 1 + 6 = 0$$

Donc 1 est racine. On peut donc factoriser S par $x-1$:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
x^4 & - & x^3 & - & 7x^2 & + & x & + & 6 & x-1 \\ \cline{10-10}
x^4 & - & x^3 & & & & & & & x^3-7x-6 \\ \cline{1-9}
 & & & - & 7x^2 & + & x & + & 6 & \\
 & & & - & 7x^2 & + & 7x & & & \\ \cline{4-9}
 & & & & & - & 6x & + & 6 & \\
 & & & & & - & 6x & + & 6 & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $S(x) = (x-1)(x^3-7x-6)$.
Il nous faut donc maintenant factoriser x^3-7x-6. Comme cette expression est de degré 3, il nous faut chercher une racine évidente puis effectuer la division euclidienne. On a :

$$(-1)^3 - 7\times(-1) - 6 = -1+7-6 = 0$$

On peut donc effectuer la division euclidienne de x^3-7x-6 par $x+1$:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & & & - & 7x & - & 6 & x+1 \\ \cline{8-8}
x^3 & + & x^2 & & & & & x^2-x-6 \\ \cline{1-7}
 & - & x^2 & - & 7x & - & 6 & \\
 & - & x^2 & - & x & & & \\ \cline{2-7}
 & & & - & 6x & - & 6 & \\
 & & & - & 6x & - & 6 & \\ \cline{4-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $S(x) = (x-1)(x+1)(x^2-x-6)$.
Il nous reste à factoriser x^2-x-6. Pour cela, calculons son discriminant. On a : $\Delta = 1+24 = 25$. On a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

Ainsi, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Et donc,

$$\boxed{\mathrm{S}(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)}$$

5. On commence par chercher une racine évidente de T. On a :

$$\mathrm{T}(-2) = -(-2)^3 + (-2)^2 + 16 \times (-2) + 20 = 8 + 4 - 32 + 20 = 0$$

On peut donc factoriser T par $x+2$:

$$\begin{array}{rcrcrcr|l}
-x^3 & + & x^2 & + & 16x & + & 20 & x+2 \\ \cline{8-8}
-x^3 & - & 2x^2 & & & & & -x^2+3x+10 \\ \cline{1-7}
 & & 3x^2 & + & 16x & + & 20 & \\
 & & 3x^2 & + & 6x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & 10x & + & 20 & \\
 & & & & 10x & + & 20 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $\mathrm{T}(x) = (x+2)(-x^2+3x+10)$.
Il nous reste maintenant à factoriser $-x^2+3x+10$. Pour cela, on calcule son discriminant : $\Delta = 9 + 40 = 49$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-3-7}{-2} = 5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+7}{-2} = -2$$

Ainsi, $-x^2+3x+10 = -(x-5)(x+2)$. Et donc,

$$\boxed{\mathrm{T}(x) = -(x+2)^2(x-5)}$$

6. Tout d'abord, il est clair que l'on peut factoriser U par x :

$$\mathrm{U}(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 4x = x(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4)$$

Cherchons désormais à factoriser $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$. Comme cette expression est de degré 4, il nous faut d'abord trouver une racine évidente. On a :

$$1^4 - 2 \times 1^3 + 5 \times 1^2 - 8 \times 1 + 4 = 1 - 2 + 5 - 8 + 4 = 0$$

Donc 1 est racine et on peut factoriser $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$ par $x-1$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr|l}
x^4 & - & 2x^3 & + & 5x^2 & - & 8x & + & 4 & x-1 \\ \cline{10-10}
x^4 & - & x^3 & & & & & & & x^3 - x^2 + 4x - 4 \\ \cline{1-9}
 & - & x^3 & + & 5x^2 & - & 8x & + & 4 & \\
 & - & x^3 & + & x^2 & & & & & \\ \cline{2-9}
 & & & + & 4x^2 & - & 8x & + & 4 & \\
 & & & + & 4x^2 & - & 4x & & & \\ \cline{4-9}
 & & & & & - & 4x & + & 4 & \\
 & & & & & - & 4x & + & 4 & \\ \cline{6-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi $\mathrm{U}(x) = x(x-1)(x^3-x^2+4x-4)$. Cherchons désormais à factoriser x^3-x^2+4x-4. Comme cette expression est de degré 3. Il nous faut chercher une racine évidente. On a :

$$1^3 - 1^2 + 4 \times 1 - 4 = 1 - 1 + 4 - 4$$

Donc, 1 est racine et on peut factoriser $x^3 - x^2 + 4x - 4$ par $x - 1$:

$$\begin{array}{ccccccc|l}
x^3 & - & x^2 & + & 4x & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8}
x^3 & - & x^2 & & & & & x^2+4 \\ \cline{1-7}
 & & & & 4x & - & 4 & \\
 & & & & 4x & - & 4 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Enfin, il est clair que $x^2 + 4$ n'a pas de racine et ne peut donc pas être factorisé davantage. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{U}(x) = x(x-1)^2(x^2+4)}$$

7. Commençons par chercher une racine évidente de V. On a :

$$\mathrm{V}(-1) = 6 \times (-1)^3 + 5 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) - 1 = -6 + 5 + 2 - 1 = 0$$

Donc -1 est racine et on peut factoriser V par $x + 1$:

$$\begin{array}{ccccccc|l}
6x^3 & + & 5x^2 & - & 2x & - & 1 & x+1 \\ \cline{8-8}
6x^3 & + & 6x^2 & & & & & 6x^2-x-1 \\ \cline{1-7}
 & - & x^2 & - & 2x & - & 1 & \\
 & - & x^2 & - & x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & x & - & 1 & \\
 & & & - & x & - & 1 & \\ \cline{4-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $\mathrm{V}(x) = (x+1)(6x^2 - x + 1)$.
Il nous reste à factoriser $6x^2-x-1$. Pour cela, on calcule son discriminant : $\Delta = 1+24 = 25$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{1-5}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$6x^2 - x + 1 = 6(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$$

Et donc,

$$\boxed{\mathrm{V}(x) = 6(x+1)(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})}$$

2.16 On commence par chercher une racine évidente. On a :

$$2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 2 - 3 + 5 - 4 = 0$$

1 est donc racine et donc $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ peut être factorisé par $x - 1$:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 2x^3 & - & 3x^2 & + & 5x & - & 4 & x-1 \\ \cline{8-8} 2x^3 & - & 2x^2 & & & & & 2x^2-x+4 \\ \cline{1-7} & - & x^2 & + & 5x & - & 4 & \\ & - & x^2 & + & x & & & \\ \cline{3-7} & & & & 4x & - & 4 & \\ & & & & 4x & - & 4 & \\ \cline{5-7} & & & & & & 0 & \end{array}$$

Cherchons désormais les racines de $2x^2 - x + 4$. On calcule pour cela le discriminant : $\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$. Donc $2x^2 - x + 4$ n'admet pas de racine. Ainsi,

$$\mathscr{S} = \{1\}$$

2.17

1. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = (x^2-2)(x^2+ax+b) &\iff x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30 = x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x^2 - 2ax - 2b \\ &\iff x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 4x + 30 = x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - 2ax - 2b \\ &\quad \left\{ \begin{array}{rcl} -2 & = & a \\ -17 & = & b-2 \\ 4 & = & -2a \\ 30 & = & -2b \end{array} \right. \\ &\quad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b & = & -15 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $a = -2$ et $b = -15$, on a l'égalité demandée. Autrement dit,

$$f(x) = (x^2-2)(x^2-2x-15)$$

2. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff (x^2-2)(x^2-2x-15) = 0 \\ &\iff x^2 - 2 = 0 \qquad \text{ou } x^2 - 2x - 15 = 0 \end{aligned}$$

Les racines de x^2-2 sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Pour trouver les racines de $x^2-2x-15$, on calcule le discriminant : $\Delta = 4 + 60 = 64$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{2-8}{2} = -3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2+8}{2} = 5$$

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -3; 5\right\}$$

2.18

1. On a :

$$f(-1) = (-1)^4 + 12 \times (-1)^3 + 18 \times (-1)^2 - 140 \times (-1) - 147 = 1 - 12 + 18 + 140 - 147 = 0$$

$$f(3) = 3^4 + 12 \times 3^3 + 18 \times 3^2 - 140 \times 3 - 147 = 81 + 324 + 162 - 420 - 147 = 0$$

Donc, -1 et 3 sont bien racines de f. Il existe donc un polynôme g tel que :

$$f(x) = (x+1)(x-3)g(x)$$

2. On a $(x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$. Effectuons alors la division euclidienne de f par $x^2 - 2x - 3$:

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
x^4 & + & 12x^3 & + & 18x^2 & - & 140x & -147 & 4 & x^2-2x-3 \\ \cline{10-10}
x^4 & - & 2x^3 & - & 3x^2 & & & & & x^2+14x+49 \\ \cline{1-9}
 & & 14x^3 & + & 21x^2 & - & 140x & - & 147 & \\
 & & 14x^3 & - & 28x^2 & - & 42x & & & \\ \cline{2-9}
 & & & & 49x^2 & - & 98x & - & 147 & \\
 & & & & 49x^2 & - & 98x & - & 147 & \\ \cline{5-9}
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $g(x) = x^2 + 14x + 49$.
Cherchons maintenant les racines de g. On commence par calculer le discriminant : $\Delta = 196 - 196 = 0$. Il y a donc une racine double :

$$x_0 = \frac{-14}{2} = -7$$

Ainsi, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont

$$\mathscr{S} = \{-7; -1; 3\}$$

2.19

1. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{7}{x+1} = \frac{2}{x} &\iff \frac{7}{x+1} - \frac{2}{x} = 0 \\
&\iff \frac{7x}{x(x+1)} - \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = 0 \\
&\iff \frac{7x - 2x - 2}{x(x+1)} = 0 \\
&\iff \frac{5x - 2}{x(x+1)} = 0
\end{aligned}$$

Les valeurs interdites sont $x = 0$ et $x = -1$.
Par ailleurs, $5x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{5}$. Cette solution ne fait pas parti des valeurs interdites, donc :

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{2}{5}\right\}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x+2}+\frac{3}{x-2}=\frac{4}{x^2-4} &\iff \frac{x+1}{x+2}+\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=0\\
&\iff \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{4}{(x+2)(x-2)}=0\\
&\iff \frac{x^2-x-2+3x+6-4}{(x+2)(x-2)}=0\\
&\iff \frac{x^2+2x}{(x+2)(x-2)}=0
\end{aligned}$$

Les valeurs interdites sont $x=-2$ et $x=2$.
Par ailleurs, $x^2+2x=0 \iff x(x+2)=0 \iff x=0$ ou $x=-2$. Or, -2 fait parti des valeurs interdites, donc :

$$\mathscr{S}=\{0\}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{-2x-1}{x+1}=\frac{2x-3}{1-x} &\iff \frac{-2x-1}{x+1}-\frac{2x-3}{1-x}=0\\
&\iff \frac{(-2x-1)(1-x)-(2x-3)(x+1)}{(x+1)(1-x)}=0\\
&\iff \frac{-2x+2x^2-1+x-2x^2-2x+3x+3}{(x+1)(1-x)}=0\\
&\iff \frac{2}{(x+1)(1-x)}=0
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible. Donc,

$$\mathscr{S}=\emptyset$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x}=\frac{x-1}{x+1} &\iff \frac{3}{x}-\frac{x-1}{x+1}=0\\
&\iff \frac{3(x+1)}{x(x+1)}-\frac{x(x-1)}{x(x+1)}=0\\
&\iff \frac{3x+3-x^2+x}{x(x+1)}=0\\
&\iff \frac{-x^2+4x+3}{x(x+1)}=0
\end{aligned}$$

On a deux valeurs interdites, $x=0$ et $x=-1$. Par ailleurs, pour résoudre l'équation $-x^2+4x+3=0$, on calcule son discriminant : $\Delta=16+12=28$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{28}}{-2} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-4+\sqrt{28}}{-2}$$

Aucune de ces deux solutions n'est valeur interdite, donc :

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{-4-\sqrt{28}}{-2};\frac{-4+\sqrt{28}}{-2}\right\}$$

5. On a :

$$\begin{aligned} 2x = \frac{3x-5}{x-2} &\iff 2x - \frac{3x-5}{x-2} = 0 \\ &\iff \frac{2x(x-2)}{x-2} - \frac{3x-5}{x-2} = 0 \\ &\iff \frac{2x^2-4x-3x+5}{x-2} = 0 \\ &\iff \frac{2x^2-7x+5}{x-2} = 0 \end{aligned}$$

On a une valeur interdite, $x = 2$. Pour résoudre $2x^2 - 7x + 5 = 0$, on calcule le discriminant : $\Delta = 49 - 40 = 9$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{7-3}{4} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

Aucune de ces deux solutions n'est valeur interdite, donc :

$$\mathscr{S} = \left\{1; \frac{5}{2}\right\}$$

6. On a :

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{1}{4} &\iff \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{4} = 0 \\ &\iff \frac{12x}{4x^2} + \frac{16}{4x^2} - \frac{x^2}{4x^2} = 0 \\ &\iff \frac{-x^2+12x+16}{4x^2} = 0 \end{aligned}$$

On a une valeur interdite $x = 0$. Pour résoudre, $-x^2 + 12x + 16 = 0$, on calcule le discriminant : $\Delta = 144 + 64 = 208$. On a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-12-\sqrt{208}}{-2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-12+\sqrt{208}}{-2}$$

Aucune de ces deux solutions n'est valeur interdite donc

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{-12-\sqrt{208}}{-2}; \frac{-12+\sqrt{208}}{-2}\right\}$$

2.20 On a :

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant 8 &\iff x + \frac{16}{x} \leqslant 8 \\ &\iff x + \frac{16}{x} - 8 \leqslant 0 \\ &\iff \frac{x^2-8x+16}{x} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Établissons désormais le tableau de signe de $x^2 - 8x + 16$. On calcule pour cela son discriminant : $\Delta = 64 - 64 = 0$. Il y a donc une racine double :

$$x_0 = \frac{8}{2} = 4$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$x^2-8x+16$		$+$		$+$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
Quotient $\dfrac{x^2-8x+16}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

Ainsi, on a $\dfrac{x^2-8x+16}{x} \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, *i.e* $f(x) \leqslant 8$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2.21

1. Établissons le tableau de signes de $\dfrac{2x+3}{-x+1}$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
Quotient $\dfrac{2x+3}{-x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi,

$$\mathscr{S} =]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup]1; +\infty[$$

2. Pour établir le tableau de signes de $\dfrac{x^2-6x+8}{-x+3}$, on commence par calculer le discriminant : $\Delta = 36 - 32 = 4$. On a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
x^2-6x+8		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Quotient $\dfrac{x^2-6x+8}{-x+3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Et donc,

$$\mathscr{S} =]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$$

---

8. Table des matières

1 **Vocabulaire** **2**

2 **Équations de degré 1 : $ax+b=0$ avec $a\neq 0$** **3**
2.1 Résolution de l'équation $ax+b=0$ 3
2.2 Signe de $ax+b$ 3

3 **Trinôme du second degré : ax^2+bx+c, avec $a\neq 0$** **4**
3.1 Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ 4
3.2 Signe du trinôme ax^2+bx+c 5

4 **Polynômes** **7**
4.1 Polynômes de degré n 7
4.2 Racine d'un polynôme 8

5 **Autres résolutions d'équations et d'inéquations** **10**
5.1 Équations produit 10
5.2 Équations quotient 11
5.3 Inéquations produits et inéquations quotient 13

6 **Exercices** **14**
6.1 Degré 1 14
6.2 Degré 2 14
6.3 Équations et inéquations produit 15
6.4 Degré supérieur 15
6.5 Fractions rationnelles 16

7 **Corrigé des exercices** **18**