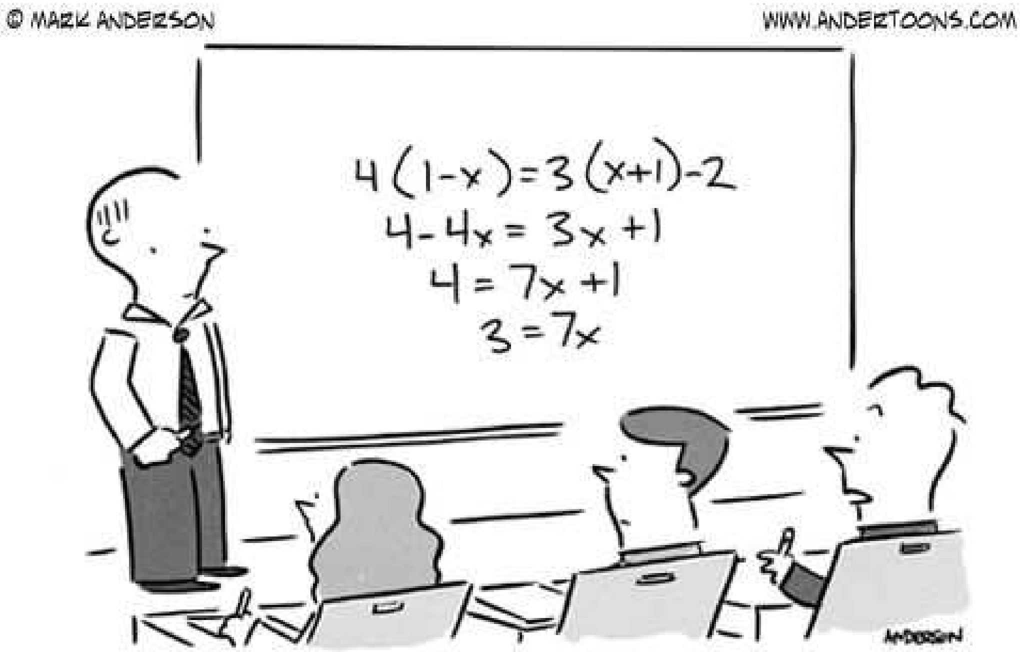
Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 15

Systèmes linéaires



"Wouldn't it be more efficient to just find who's complicating equations and ask them to stop?"

Adrien Fontaine
Année scolaire 2020–2021

1. DÉFINITION ET EXEMPLES

Définition 1 :

On appelle **système linéaire** de n **équations** à p **inconnues** $x_1, \dots, x_p$ tout système (S) de la forme :

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où $a_{i,j}$ et b_i désignent des réels supposés connus.
La i-ème équation du système (S) est notée L_i et s'appelle la i-ème **ligne** du système (S).
Résoudre le système (S), c'est déterminer tous les $(x_1, \dots, x_p)$ vérifiant les n équations du système.
Si pour tout i dans $[\![1;n]\!]$, on a $b_i = 0$, on dit que le système (S) est **homogène**.

Exemple :

- Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x+y = & 1 \\ x-y = & -4 \end{array} \right.$$

  $(-1,3)$ est solution. En effet, on a $2\times(-1)+3 = -2+3 = 1$ et $-1-3 = -4$.
- Le système suivant est un système homogène de trois équations à trois inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x+y+5z & = 0 \\ x-3y+z & = 0 \\ 3x-2y+6z & = 0 \end{array} \right.$$

  Notons que le triplet $(0,0,0)$ est solution, mais il y a peut-être d'autres triplets solutions ...
- Le système suivant est un système de trois équations à deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x+5y & = -2 \\ 3x+y & = 0 \\ -x+2y & = 1 \end{array} \right.$$

Remarque :

- Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet toujours une unique solution ! En effet, certains systèmes linéaires admettent une infinité de solutions et d'autres n'admettent aucune solution.
- En pratique, on rencontrera principalement des systèmes de deux équations à deux inconnues ou bien des systèmes de trois équations à trois inconnues.

Définition 2 : Systèmes équivalents

On dit que deux systèmes S et S′ sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

2. Résolution des systèmes linéaires

2.1. Méthode par substitution

Pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on peut résoudre un système en exprimant une inconnue en fonction des autres et en remplaçant l'inconnue dans une autre ligne.

Exemple : On considère le système :

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x-y &= 5 \end{cases}$$

En utilisant (L1), on obtient $x = 1-y$. Donc, en remplaçant dans (L2), cela donne $2(1-y)-y = 5$, d'où $2-2y-y=5$, *i.e* $2-3y=5$. On résout cette équation :

$$2-3y=5 \iff -3y = 5-2 \iff -3y=3 \iff y = \frac{3}{-3} = -1$$

Et donc, $x = 1-y = 1-(-1) = 1+1 = 2$

2.2. Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 3 :

Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$: remplacement d'une ligne par son produit par un réel non nul a.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$: regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

Proposition 1 :

Si on transforme un système à l'aide **d'une** opération élémentaire, on obtient un système équivalent.

Remarque : Il est très important de n'appliquer qu'une opération élémentaire à la fois. Sinon, on peut ne pas obtenir un système équivalent.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & 1 \\ -x & + & 12y & - & 19z & = & 2 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & 1 \\ & & 5y & - & 8z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

2.3. Système triangulaire

Définition 4 :

Un système triangulaire est un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Exemple : Les systèmes suivants sont des systèmes triangulaires :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 0 \\ & & -y & = & 2 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ & - & 2y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & 2z = 6 & & \end{array}\right.$$

La résolution des systèmes triangulaires est très simple. On trouve la dernière inconnue grâce à la dernière équation, puis on trouve les autres inconnues en remontant d'équation en équation.

Exemple : Résolvons le deuxième système triangulaire (S_2) ci-dessus.

La dernière équation nous permet d'obtenir $z = \dfrac{6}{2} = 3$. En remplaçant z dans la deuxième équation, on obtient :

$$-2y + 3 \times 3 = 3 \Longleftrightarrow -2y + 9 = 3 \Longleftrightarrow -2y = -6 \Longleftrightarrow y = \frac{-6}{-2} = 3$$

Enfin, en remplaçant y et z dans la première équation, on obtient :

$$x + 3 - 2 \times 3 = -2 \Longleftrightarrow x - 3 = -2 \Longleftrightarrow x = -2 + 3 = 1$$

Ainsi, la solution du système (S_2) est $(1;3;3)$.

2.4. Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique qui permet de passer d'un système linéaire de n équations à n inconnues quelconque à un système triangulaire équivalent en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes du système.

Exemple : On souhaite résoudre le système :

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -4 \end{array}\right.$$

<u>Première étape</u> : Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x). Si ce n'est pas le cas; on échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x (avec si possible le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Ici, on échange donc les lignes 1 et 3. Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_3$$

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, on « nettoie » la première colonne des x.

On commence par supprimer le x dans la deuxième ligne :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1$$

Puis on supprime le x dans la troisième ligne : il n'y a rien à faire ici.

<u>Deuxième étape</u> : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y). Si ce n'est pas le cas, on échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y (si possible avec le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants), mais **sans utiliser la ligne 1**.

Ici il n'y a rien à faire : la deuxième ligne contient déjà y.

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait « disparaître » la deuxième inconnue dans la troisième ligne. En d'autres termes, on « nettoie » la deuxième colonne des y.

Il suffit ici d'additionner les lignes 2 et 3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2$$

Troisième étape : On obtient alors un système triangulaire que l'on sait résoudre.

La troisième équation donne $z = \dfrac{16}{8} = 2$. En remplaçant z dans la deuxième équation, on obtient $y + 6 \times 2 = 9$ soit $y + 12 = 9$. Ainsi, $y = 9 - 12 = -3$. Enfin, en remplaçant y et z dans la première ligne, on obtient : $x - 3 - 2 = -4$ soit $x - 5 = -4$. D'où $x = -4 + 5 = 1$. Ainsi, l'unique solution du système est :

$$\mathscr{S} = \{(1; -3; 2)\}$$

3. Exercices

15.1 Résoudre le système échelonné suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

15.2 Résoudre le système échelonné suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ & & y & - & 2z & + & t & = & 3 \\ & & & & 4z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & 2t & = & -4 \end{array}\right.$$

15.3 Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 5x & + & 7y & = & 3 \end{array}\right.$$

15.4 Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 4y & = & 10 \\ 3x & + & 6y & = & 15 \end{array}\right.$$

15.5 Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 3y & = & 1 \end{array}\right.$$

15.6 Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & 8z & = & 4 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

15.7 Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

15.8 Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

15.9 Résoudre :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

15.10 Résoudre :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & & & = & 1 \end{array} \right.$$

4. Corrigé des exercices

15.1 La troisième équation nous donne :

$$z = \frac{1}{4}$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on obtient :

$$2y + 2 \times \frac{1}{4} = 1 \iff 2y + \frac{1}{2} = 1 \iff 2y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff y = \frac{1}{4}$$

Et en remplaçant y et z dans la première équation, on obtient :

$$x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \iff x + \frac{1}{2} = 1 \iff x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, l'unique solution de ce système est :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)\right\}$$

15.2 La quatrième équation nous donne :

$$t = \frac{-4}{2} = -2$$

En remplaçant dans la troisième équation, on obtient :

$$4z + 2 = 2 \iff 4z = 0 \iff z = 0$$

En remplaçant z et t dans la deuxième équation, on obtient :

$$y - 2 = 3 \iff y = 5$$

Et en remplaçant y, z et t dans la première équation, on obtient :

$$3x + 5 - 4 = 1 \iff 3x = 0 \iff x = 0$$

Ainsi, l'unique solution de ce système est :

$$\mathscr{S} = \{(0; 5; 0; -2)\}$$

15.3 On commence par isoler y dans la deuxième équation :

$$7y = 3 - 5x \iff y = \frac{3}{7} - \frac{5}{7}x$$

Puis on remplace dans la première équation :

$$2x+3\times\left(\frac{3}{7}-\frac{5}{7}x\right)=1 \iff 2x+\frac{9}{7}-\frac{15}{7}x=1 \iff -\frac{1}{7}x=-\frac{2}{7} \iff x=2$$

Puis :

$$y=\frac{3}{7}-\frac{5}{7}x=\frac{3}{7}-\frac{5}{7}\times 2=\frac{3}{7}-\frac{10}{7}=-\frac{7}{7}=-1$$

Ainsi, l'unique solution de ce système est :

$$\mathscr{S}=\{(2;-1)\}$$

15.4 On constate que si l'on multiplie la première équation par $\frac{3}{2}$, alors on obtient la deuxième équation. Ainsi, on peut ne garder que a première équation :

$$2x+4y=10$$

Il y a alors une infinite de solutions. Fixons $y=\lambda$, alors x est donné par :

$$2x+4\lambda=10 \iff 2x=10-4\lambda \iff x=5-2\lambda$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\mathscr{S}=\{(5-2\lambda;\lambda)\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$

En fixant par exemple $\lambda=1$, on trouve comme solution :

$$(x;y)=(3;1)$$

15.5 On commence par isoler y dans la deuxième équation :

$$3y=1+6x \iff y=\frac{1}{3}+2x$$

Puis on remplace dans la première équation :

$$4x-2\times\left(\frac{1}{3}+2x\right)=5 \iff 4x-\frac{2}{3}-4x=5 \iff -\frac{2}{3}=5$$

Ce qui est évidemment absurde. Ainsi, ce système n'a pas de solution :

$$\mathscr{S}=\emptyset$$

15.6 On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & 8z & = & 4 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcrcrcr} & 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ & & & & & 10z & = & -1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 & 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 4x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ & & & & 10z & = & -1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ & - & 7y & + & 8z & = & -10 \\ & & & & 10z & = & -1 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow 5L_2 - 4L_3$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ & - & 35y & + & & = & -46 \\ & & & & 10z & = & -1 \end{array}\right.$$

Avec la deuxième et la troisième équation, on trouve :

$$y = \frac{46}{35} \qquad \text{et} \qquad z = -\frac{1}{10}$$

Puis en remplaçant dans la première, on obtient :

$$2x + 3 \times \left(\frac{46}{35}\right) - 2 \times \left(-\frac{1}{10}\right) = 5 \Longleftrightarrow 2x + \frac{138}{35} + \frac{1}{5} = 5$$

Soit :

$$2x = 5 - \frac{138}{35} - \frac{1}{5} \Longleftrightarrow 2x = \frac{175}{35} - \frac{138}{35} - \frac{7}{35} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7} \Longleftrightarrow x = \frac{3}{7}$$

Ainsi, l'unique solution de ce système est :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{3}{7}; \frac{46}{35}; -\frac{1}{10}\right)\right\}$$

15.7 On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 10z & = & 0 \end{array}\right.$$

La troisième équation nous donne $z=0$, ce qui une fois remplacé dans la deuxième équation, donne $y=0$ puis $x=0$ avec la première équation. Ainsi, ce système admet une unique solution $x=0; y=0; z=0$:

$$\mathscr{S}=\{(0;0;0)\}$$

15.8 On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2$$

On a donc $z=0$. En remplaçant dans la deuxième équation, on obtient :

$$-2y=-4 \iff y=2$$

Puis en remplaçant y et z dans la première équation, on obtient :

$$x+2=5 \iff x=3$$

Ainsi, ce système admet une unique solution :

$$\mathscr{S}=\{(3;2;0)\}$$

15.9 On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-2\mathrm{L}_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1$$

La troisième équation nous donne $y = 0$. En remplaçant dans la deuxième, on obtient :

$$-z = -2 \iff z = 2$$

Puis en remplaçant dans la première, on obtient :

$$x + 4 = 3 \iff x = -1$$

Ainsi, ce système admet une unique solution :

$$\mathscr{S} = \{(-1;0;2)\}$$

15.10 On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & & & = & 1 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & & - & 6z & = & -4 \end{array}\right.$$

On a donc $z = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3}$. En remplaçant dans la deuxième équation, on obtient :

$$-y + 2 \times \frac{2}{3} = 2 \iff -y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \iff y = -\frac{2}{3}$$

Puis en remplaçant y et z dans la première équation, on obtient :

$$x + 2 \times \frac{2}{3} = 1 \iff x = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

Ainsi, ce système admet une unique solution :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{1}{3} : -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)\right\}$$

---

5. Table des matières