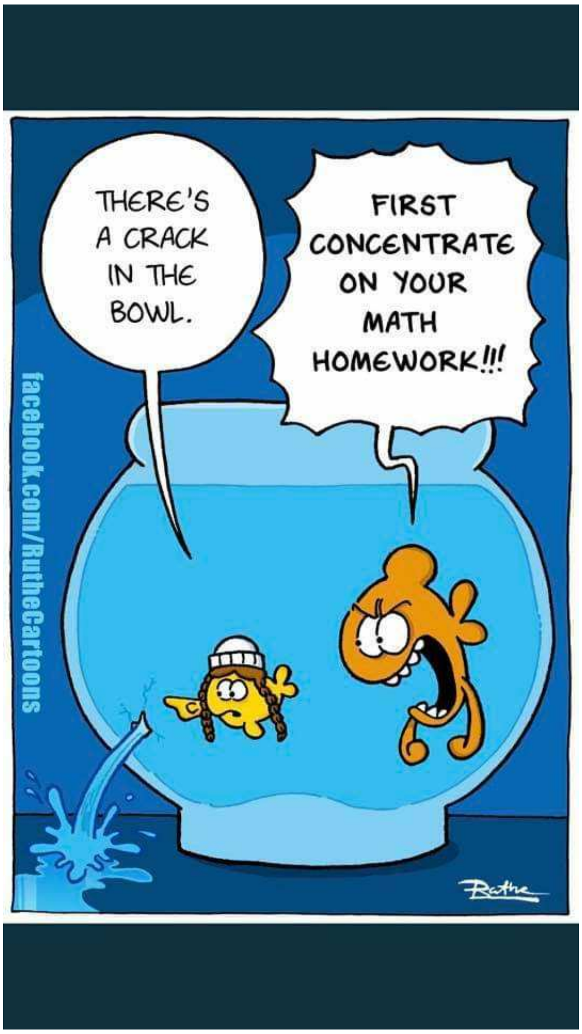
Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 12

Fonction logarithme népérien



Adrien Fontaine
Année scolaire 2020–2021

1. Fonction logarithme népérien

1.1. Définition

Définition 1 :

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et qui prend la valeur 0 pour $x=1$.

Proposition 1 : Premières conséquences

1. La fonction ln est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$
2. $\ln(1)=0$
3. Pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

1.2. Propriétés algébriques

Proposition 2 :

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$$

On peut tirer plusieurs conséquences de cette propriété fondamentale de la fonction ln :

Proposition 3 :

- Pour tout nombre réel strictement positif a, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
- Pour tout nombre réel strictement positif a, et pour tout entier relatif n, $\ln(a^n)=n\ln(a)$
- Pour tout nombre réel strictement positif a, $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(a)$

Preuve.

- On a $\ln\left(\dfrac{1}{a}\times a\right)=\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)+\ln(a)$.

  Par ailleurs, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\times a\right)=\ln(1)=0$.

  Ainsi, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)+\ln(a)=0$ et donc $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$.

$\square$

Exemple : Soient x et $y > 0$. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ln(2x) - \ln(x)$
   $= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x) = \ln(2)$
2. $\ln(x^2) - \ln(x)$
   $= 2\ln(x) - \ln(x) = \ln(x)$
3. $\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
   $= \ln(x) + \ln(x) = 2\ln(x)$
4. $2\ln(x^3) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$
   $= 6\ln(x) - 3\ln(x) = 3\ln(x)$
5. $\ln(1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
   $= 0 - \ln(x) - 2\ln(x)$
6. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$
   $= \ln(x) - \ln(y) + \ln(y) - \ln(x) = 0$

2. ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

2.1. Domaine de définition

Proposition 4 :

Le domaine de définition de la fonction logarithme est $\mathscr{D} =]0; +\infty[$.

Ainsi, dans le cas d'une fonction de la forme $f = \ln(u)$, le domaine de définition est donné par les solutions de l'inéquation $u(x) > 0$.

Exemple : Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

On résoud l'inéquation $x^2 - 3x + 2 > 0$. On a $\Delta = 9 - 8 = 1$, il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	−	0	+	

Et donc $\mathscr{D}_f =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$.

2.2. Variation

Proposition 5 :

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Preuve. La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc continue sur cet intervalle.
La dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Or si $x > 0$ alors, $\frac{1}{x} > 0$.
La dérivée de la fonction ln est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. □

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

Proposition 6 :

Pour tous réels a et b strictement positifs :
- $\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$
- $\ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$

Exemple : Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1. $\ln(x+2) = 2\ln(x)$ sur $I =]0;+\infty[$.
On a $\ln(x+2) = 2\ln(x) \iff \ln(x+2) = \ln(x^2) \iff x+2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$. On calcule alors le discriminant : $\Delta = 1+8 = 9$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

On ne garde que la solution qui est dans l'intervalle $I =]0;+\infty[$. Il n'y a donc qu'une solution qui est $x = 2$.

2. $\ln(2x-3) + \ln(3) = 2\ln(x)$ sur $I =]\frac{3}{2};+\infty[$.
On a $\ln(2x-3)+\ln(3) = 2\ln(x) \iff \ln((2x-3)\times 3) = \ln(x^2) \iff \ln(6x-9) = \ln(x^2) \iff 6x+9 = x^2 \iff x^2 - 6x + 9 = 0$. On calcule alors le discriminant : $\Delta = 36 - 36 = 0$. Il y a donc une seule racine qui est :

$$x_0 = -\frac{(-6)}{2\times 1} = 3$$

De plus, 3 est bien dans l'intervalle $]\frac{3}{2};+\infty[$ donc l'unique solution de l'équation considérée est $x = 3$.

3. $\ln(x) + \ln(x+2) = \ln(9x-12)$ sur $I =]\frac{4}{3};+\infty[$.
On a $\ln(x)+\ln(x+2) = \ln(9x-12) \iff \ln(x(x+2)) = \ln(9x-12) \iff \ln(x^2+2x) = \ln(9x-12) \iff x^2+2x = 9x-12 \iff x^2-7x+12 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 49-48 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4$$

Ces deux racines sont dans l'intervalle $]\frac{4}{3};+\infty[$ donc l'équation considérée admet deux solutions $x = 3$ et $x = 4$.

4. $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2)$ sur $I =]\frac{1}{3}; +\infty[$.
On a $\ln(3x-1) - \ln(x) = \ln(2) \iff \ln(3x-1) = \ln(2) + \ln(x) \iff \ln(3x-1) = \ln(2x) \iff 3x-1 = 2x \iff x-1 = 0 \iff x = 1$. Or, 1 est bien dans l'intervalle $]\frac{1}{3}; +\infty[$ donc l'équation considérée admet $x = 1$ comme unique solution.

Exemple : Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

1. $\ln(2x) < \ln(x+7)$ sur $I =]0; +\infty[$.
On a $\ln(2x) < \ln(x+7) \iff 2x < x+7 \iff x < 7$. Il faut donc que $x < 7$ et que x soit dans l'intervalle $]0; +\infty[$ donc
$$\mathscr{S} =]0; 7[$$

2. $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geqslant \ln(2)$ sur $I =]-\frac{1}{3}; +\infty[$.
On a $\ln(3x+1) - \ln(x+1) \geqslant \ln(2) \iff \ln(3x+1) \geqslant \ln(2) + \ln(x+1) \iff \ln(3x+1) \geqslant \ln(2(x+1)) \iff \ln(3x+1) \geqslant \ln(2x+2) \iff 3x+1 \geqslant 2x+2 \iff x \geqslant 1$. Il faut donc que $x \geqslant 1$ et que x soit dans l'intervalle $]-\frac{1}{3}; +\infty[$ donc
$$\mathscr{S} = [1; +\infty[$$

En particulier, puisque $\ln 1 = 0$:

Proposition 7 :

Pour tout réel x strictement positif :
- $\ln x = 0$ si, et seulement si, $x = 1$
- $\ln x > 0$ si, et seulement si, $x > 1$
- $\ln x < 0$ si, et seulement si, $0 < x < 1$

2.3. Limites

Proposition 8 :

La fonction ln a pour limite $+\infty$ en $+\infty$:
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Proposition 9 :

La fonction ln a pour limite $-\infty$ en 0 :
$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$
L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe d'équation $y = \ln x$

Exemple : Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to3^+} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$$

- On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$$

Et $\lim_{X\to2} \ln(X) = \ln(2)$. Donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = \ln(2)$$

- On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to3^+} 2x-1 = 5 \\ \lim_{x\to3^+} x-3 = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par quotient} \\ \lim_{x\to3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty \end{array}$$

Et $\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = +\infty$$

- On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} 2x-1 = 0^- \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} x-3 = -\frac{5}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par quotient} \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2x-1}{x-3} = 0^+ \end{array}$$

Et $\lim_{X\to0^+} \ln(X) = -\infty$. Donc, par composition :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = -\infty$$

2.4. Nombre e

D'après les résultats des paragraphes précédents, on a le tableau de variation suivant :

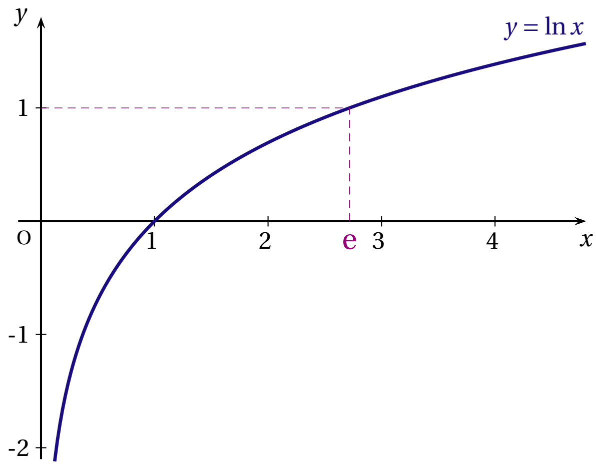
x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc l'allure de la courbe de la fonction logarithme :

Nous observons graphiquement sur la figure ci-dessus qu'il existe un point unique de la courbe ayant pour ordonnée 1. Son abscisse est voisine de $2,7$.

Au delà de cette observation graphique, l'existence d'un unique antécédent de 1 repose sur la variation de la fonction ln qui est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand x varie dans $]0;+\infty[$.

Il existe donc un seul réel x tel que $\ln(x) = 1$.



Définition 2 :

e est le nombre réel définie par $\ln(e) = 1$.

Remarque : On a : $e \simeq 2,71$.

2.5. Croissance comparée

Étudions désormais quelques limites remarquables, qui font intervenir la fonction logarithme. On étudie ce que l'on appelle des résultats de *croissance comparée*.

Proposition 10 : Croissance comparée

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

En particulier, lorsque $n = 1$:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Remarque : Ces limites sont des formes indéterminées. Pour lever de telles formes indéterminées, on applique les résultats de croissance comparée.
On retient que les puissances « l'emportent » sur la fonction logarithme.

Exemple :

- $\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln(x) = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x) = +\infty$ par croissance comparée

3. Étude d'une fonction de la forme $\ln(u)$

Proposition 11 :

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I. La fonction composée $f = \ln \circ u$ définie par

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f(x) = \ln(u(x))$$

est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$. Calculer $f'(x)$.
Posons $u(x) = x^2 - 3x + 2$. On a $u'(x) = 2x - 3$. Donc,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

Exemple : **Étude de fonction**
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   Résolvons l'inéquation $x^2 - 5x + 6 > 0$. On a : $\Delta = 25 - 24 = 1$. Il y a donc deux racines qui sont :
   $$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$
   On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

   Et donc
   $$\mathscr{D}_f =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$$

2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   On a :
   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-5x+6 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \ln(\mathrm{X}) = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par composition} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2-5x+6) = +\infty \end{array}$$
   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} x^2-5x+6 = 0^+ \\ \lim\limits_{\mathrm{X}\to0^+} \ln(\mathrm{X}) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par composition} \\ \lim\limits_{x\to2^-} \ln(x^2-5x+6) = -\infty \end{array}$$
   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to3^+} x^2-5x+6 = 0^+ \\ \lim\limits_{\mathrm{X}\to0^+} \ln(\mathrm{X}) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{par composition} \\ \lim\limits_{x\to3^+} \ln(x^2-5x+6) = -\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5x+6 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par composition} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2-5x+6) = +\infty\end{array}$$

3. Étudier les variations de la fonction f.
Posons $u(x) = x^2-5x+6$. Alors, $u'(x) = 2x-5$. Donc,

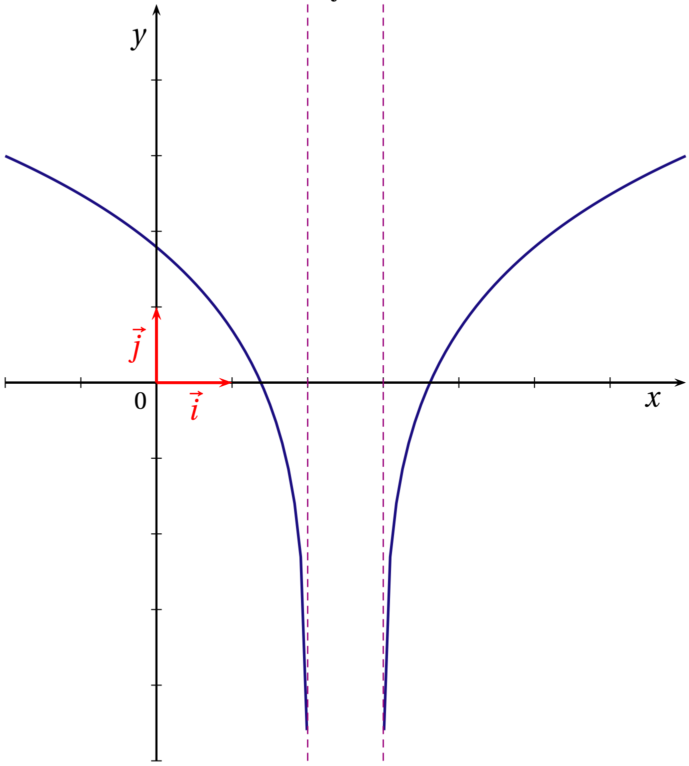
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$$

Étudions maintenant le signe de $2x-5$. On a : $2x-5 \geqslant 0 \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2}$. Grâce au tableau de signe de x^2-5x+6 établi à la question **1**, on en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et ainsi le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$2x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	||				||	$+$	

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ||		|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Tracer l'allure de la courbe de la fonction f.



4. Exercices

12.1 Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $\ln(x+4) = 2\ln(x+2)$ sur $I =]-2;+\infty[$
2. $\ln(x+3)+\ln(x+1) = \ln(x+13)$ sur $I =]-1;+\infty[$
3. $\ln(3x-1)-\ln x = \ln 2$ sur $I =]\frac{1}{3};+\infty[$
4. $\ln x = 1$ sur $I =]0;+\infty[$

12.2 Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle considéré :

1. $\ln(x-2) \leqslant 0$ sur $I =]2;+\infty[$
2. $\ln(3x+1)-\ln(x+1) \geqslant \ln 2$ sur $I =]-\frac{1}{3};+\infty[$
3. $\ln(x-3) \geqslant 1$ sur $I =]3;+\infty[$
4. $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant 0$ sur $I =]-\frac{1}{2};+\infty[$

12.3 Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2)}$
3. $f(x) = \ln(x^2-3x+1)$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$
6. $f(x) = x-\ln(x)$

12.4 Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

1. $f(x) = x-\ln(x)$
2. $f(x) = (x^2+1)\ln(x)$
3. $f(x) = x\ln(x^2)$
4. $f(x) = x\ln(x+1)$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x}+\ln(x)$
6. $f(x) = (x^2-5x+6)\ln(x)$

12.5 Dans chacun des cas suivants, étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$:

a) $f(x) = 3x+2-\ln x$; b) $f(x) = \dfrac{2x+\ln x}{x}$; c) $f(x) = \dfrac{2\ln x-1}{x}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{x}-\ln x$

12.6 Donner le domaine de définition et calculer la dérivée $f'(x)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x-2-2\ln x$.
2. $f(x) = x\ln x$.
3. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
4. $f(x) = x^2+1+2\ln x$.
5. $f(x) = x^2\ln x$.
6. $f(x) = \dfrac{x+3\ln x}{x}$.
7. $f(x) = \ln(x-4)$.
8. $f(x) = \ln(1+x^2)$.
9. $f(x) = \dfrac{10}{\ln(4x-2)}$.

12.7 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$

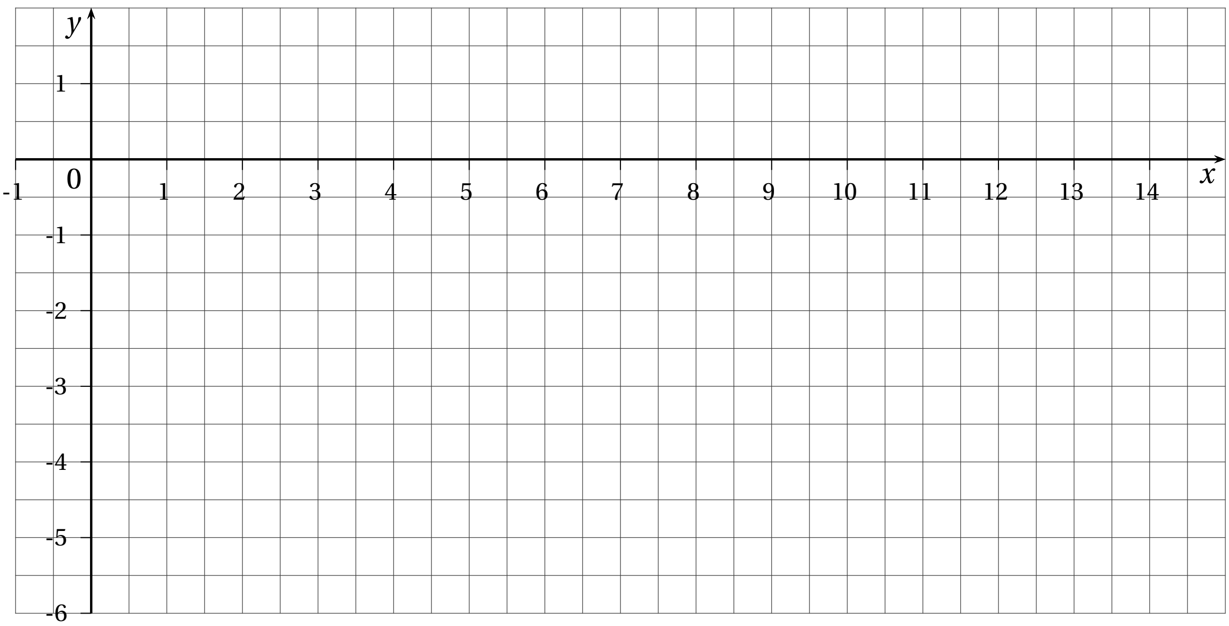
1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f.

12.8 **Partie I**
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g.
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie II
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x} - \dfrac{x}{2} + 1$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. **a.** Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   c. Montrer que la droite D d'équation $y = -\dfrac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.
   d. Calculer les coordonnées du point A, intersection de la droite D et de la courbe C_f.
2. **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de la fonction f.
3. Tracer la droite D et la courbe C_f dans le repère ci-dessous.



12.9 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. On note C_f sa courbe représentative.

1. **a.** Étudier les limites de f aux bornes son intervalle de définition.

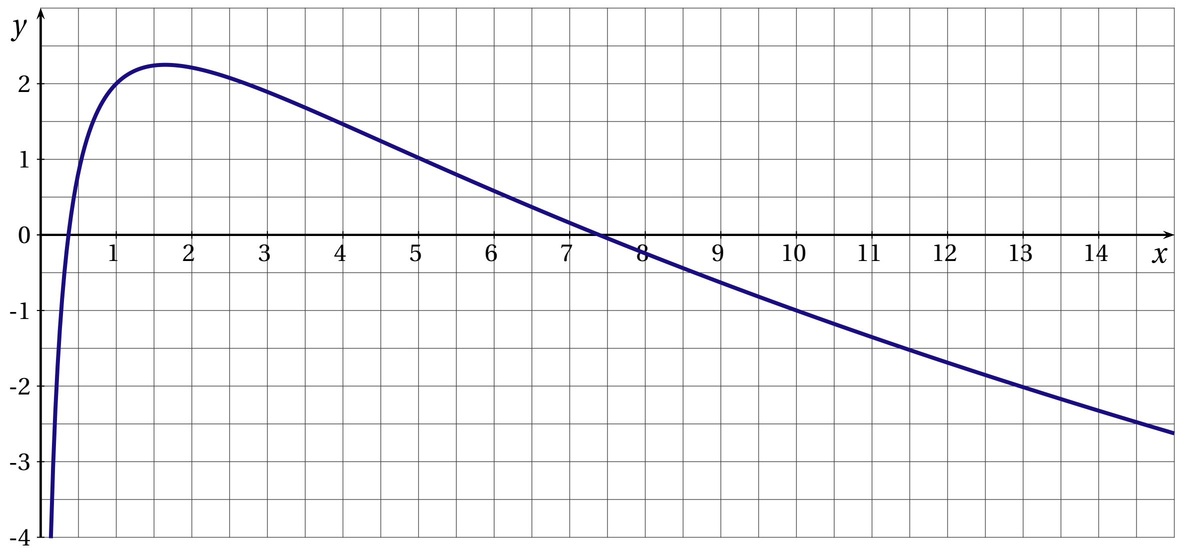
   b. La courbe C_f admet-elle des asymptotes ?

2. **a.** Montrer que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

   b. Étudier les variations de la fonction f.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

12.10 On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1+\ln x)(2-\ln x)$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. Étudier les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.

4. **a.** Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1+X)(2-X) = 2$.

   c. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

12.11 Extrait de ECRICOME 2019

Soit g la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

   b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

3. **a.** Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique (D) dont on précisera l'équation.

   b. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D).

5. Corrigé des exercices

12.1

1. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\ln(x+4) = 2\ln(x+2) &\iff \ln(x+4) = \ln((x+2)^2)\\ &\iff x+4 = (x+2)^2\\ &\iff x+4 = x^2+4x+4\\ &\iff -x^2-3x = 0\end{aligned}$$

On calcule alors le discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4\times(-1)\times 0 = 9$. Il y a donc deux racines possibles qui sont :

$$x_1 = \frac{3-3}{-2} = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+3}{-2} = -3$$

Or, -3 n'est pas dans l'intervalle considéré $]-2;+\infty[$. Ainsi, il y a une unique solution :

$$\mathrm{S} = \{0\}$$

2. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\ln(x+3)+\ln(x+1) = \ln(x+13) &\iff \ln((x+3)(x+1)) = \ln(x+13)\\ &\iff (x+3)(x+1) = x+13\\ &\iff x^2+x+3x+3 = x+13\\ &\iff x^2+3x-10 = 0\end{aligned}$$

On calcule alors le discriminant : $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times(-10) = 9+40 = 49$. Il y a donc deux racines possibles qui sont :

$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$$

Or, -5 n'est pas dans l'intervalle considéré $]-1;+\infty[$. Ainsi, il y a une unique solution :

$$\mathrm{S} = \{2\}$$

3. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\ln(3x-1)-\ln(x) = \ln(2) &\iff \ln(3x-1) = \ln(2)+\ln(x)\\ &\iff \ln(3x-1) = \ln(2x)\\ &\iff 3x-1 = 2x\\ &\iff x = 1\end{aligned}$$

Par ailleurs, 1 est bien dans l'intervalle $]\frac{1}{3};+\infty[$. Donc,

$$\mathrm{S} = \{1\}$$

4. On a $\ln(x) = 1 \iff x = e$ (voir le paragraphe **2.4** du cours).

12.2

1. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\ln(x-2)\leqslant 0 &\iff \ln(x-2)\leqslant \ln(1)\\ &\iff x-2\leqslant 1\\ &\iff x\leqslant 3\end{aligned}$$

Il faut donc **à la fois** que $x\leqslant 3$ et que x soit dans l'intervalle $]2;+\infty[$. Ainsi,

$$S=]2;3]$$

2. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}\ln(3x+1)-\ln(x+1)\geqslant \ln(2) &\iff \ln(3x+1)\geqslant \ln(2)+\ln(x+1)\\ &\iff \ln(3x+1)\geqslant \ln(2(x+1))\\ &\iff 3x+1\geqslant 2(x+1)\\ &\iff 3x+1\geqslant 2x+2\\ &\iff x\geqslant 1\end{aligned}$$

Il faut donc **à la fois** que $x\geqslant 1$ et que x soit dans l'intervalle $]-\frac{1}{3};+\infty[$. Ainsi,

$$S=[1;+\infty[$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\ln(x-3)\geqslant 1 &\iff \ln(x-3)\geqslant \ln(e)\\ &\iff x-3\geqslant e\\ &\iff x\geqslant 3+e\end{aligned}$$

Il faut donc **à la fois** que $x\geqslant 3+e$ et que x soit dans l'intervalle $]3;+\infty[$. Ainsi,

$$S=[3+e;+\infty[$$

4. On a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)\leqslant 0 &\iff \ln(2x+1)-\ln(x+1)\leqslant 0\\ &\iff \ln(2x+1)\leqslant \ln(x+1)\\ &\iff 2x+1\leqslant x+1\\ &\iff x\leqslant 0\end{aligned}$$

Il faut donc **à la fois** que $x\leqslant 0$ et que x soit dans l'intervalle $]-\frac{1}{2};+\infty[$. Ainsi,

$$S=]-\frac{1}{2};0]$$

12.3

1. On a :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) & = & +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

2. Tout d'abord, on peut remarquer que :

$$\frac{x}{\ln(x^2)} = \frac{x}{2\ln(x)}$$

Ensuite, on a :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) & = & +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2\ln(x)} = +\infty\end{array}$$

3. On a tout d'abord :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 3x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Puis, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2 - 3x + 1) = +\infty$$

4. On a tout d'abord :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Puis, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$$

5. On a :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x)}{x^2} = 0\end{array}$$

6. On a :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x) & = & -\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x) = +\infty\end{array}$$

12.4

1. On a :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to0^+} x & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to0^+} -\ln(x) & = & +\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to0^+} x - \ln(x) = +\infty$$

2. On a :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to0^+} x^2+1 & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) & = & -\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to0^+} (x^2+1)\ln(x) = -\infty$$

3. On a :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to0^+} x & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to0^+} \ln(x^2) & = & -\infty\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x^2) = 0^-\end{array}$$

4. On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) & = & \ln(1)=0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} x\ln(x+1)=0$$

5. Tout d'abord, on a :

$$\frac{1}{x}+\ln(x)=\frac{1+x\ln(x)}{x}$$

Ensuite, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to 0^+} 1+x\ln(x)=1$$

Et, évidemment $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+$. Donc, par quotient :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+x\ln(x)}{x}=+\infty$$

6. On a :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} x^2-5x+6 & = & 6 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) & = & -\infty \end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} (x^2-5x+6)\ln(x)=-\infty$$

12.5

1. On commence par calculer la limite en 0 :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} 3x+2 & = & 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln(x) & = & +\infty \end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} 3x+2-\ln(x)=+\infty$$

Puis, on calcule la limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} 3x+2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\ln(x) & = & -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 3x+2-\ln(x)=+\infty\end{array}$$

2. On commence par calculer la limite en 0 :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} 2x+\ln(x) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+\ln(x)}{x}=-\infty$$

Puis, on calcule la limite en $+\infty$. Pour cela, on réécrit la fonction f sous la forme :

$$f(x)=\frac{2x+\ln(x)}{x}=\frac{2x}{x}+\frac{\ln(x)}{x}=2+\frac{\ln(x)}{x}$$

Par croissance comparée, on sait que :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0^+$$

Donc,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=2$$

3. On commence par calculer la limite en 0 :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln(x)-1 & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x) & = & 0^+ \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\ln(x)-1}{x} = -\infty$$

Puis, on calcule la limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln(x)-1 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x & = & +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\ln(x)-1}{x} = 0^+\end{array}$$

4. On commence par calculer la limite en 0 :

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln(x) & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$$

Puis on calcule la limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} & = & 0^+ \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\ln(x) & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$$

---

6. Table des matières