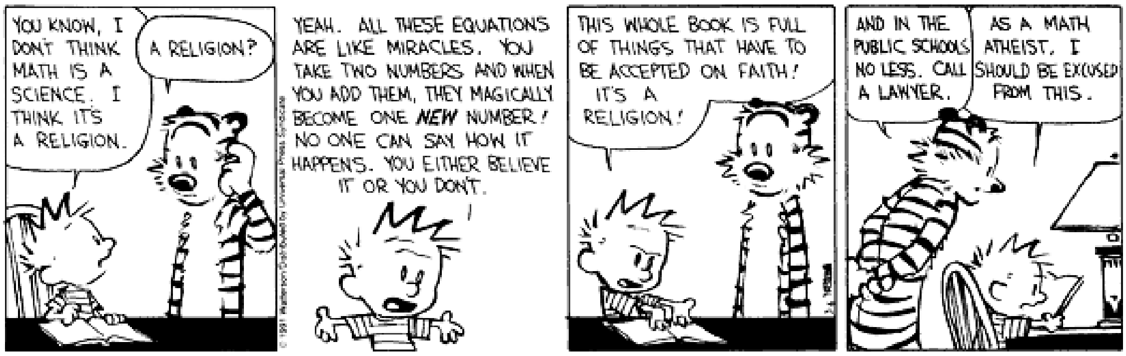
Cours de mathématiques

ECT 1ère année

Chapitre 11

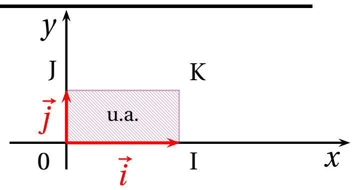
Intégrales et primitives



Adrien Fontaine
Année scolaire 2020–2021

1. Intégrale et aire

1.1. Unité d'aire



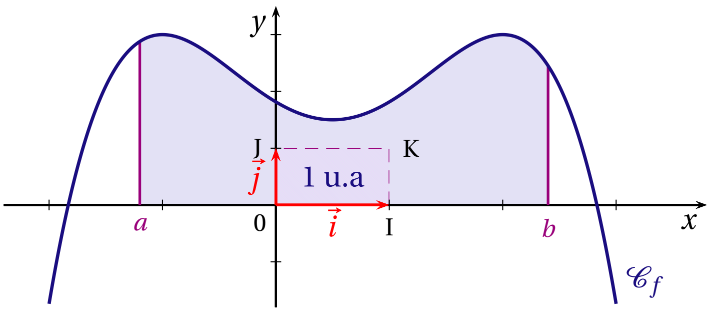
Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $I(0;1)$, $J(0;1)$ et $K(1;1)$.

1.2. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1 :

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



Remarque :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

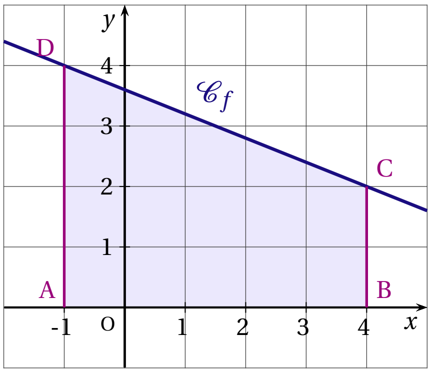
Exemple :

Calculons $\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x+3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$

L'intégrale $\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze ABCD.

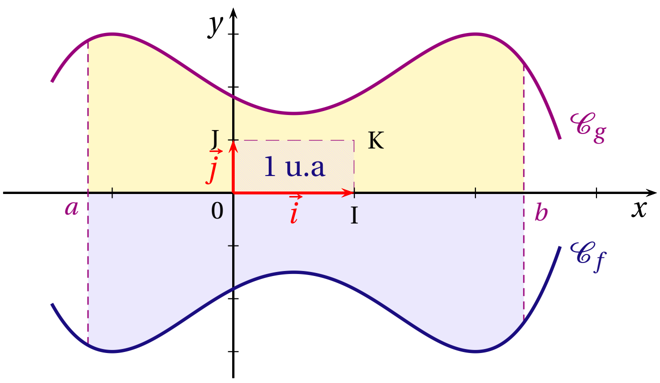
$$\int_{-1}^{4} (-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x = \frac{(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\times \mathrm{AB}}{2} = \frac{(4+2)\times 5}{2} = 15$$



1.3. Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Définition 2 :

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$.

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$

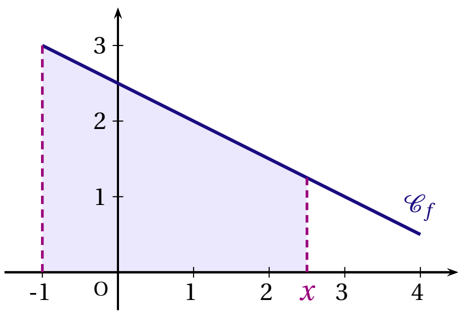
1.4. Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = \int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié. On a donc $\mathrm{F}(x) = \frac{(3+(-0,5x+2,5))\times(x+1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}$. La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $\mathrm{F}'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x)$.



2. Primitives

2.1. Définition

Définition 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction f sur** I si F est dérivable et si :
$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Exemple :
- $\mathrm{F} : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = 3x^3 + 6x = f(x)$
- $\mathrm{G} : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur$\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$
- Les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto x^2$, $\mathrm{G} : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $\mathrm{H} = x \mapsto x^2 + \mathrm{K}$, $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) = \mathrm{H}'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque :
- Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.

- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle **d'une** primitive de la fonction f et non de **la** primitive de la fonction f.

Théorème 2 :

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est la forme $\mathrm{F}+c$ où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
  Si $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $\mathrm{F}_0(x_0) = y_0$.

Exemple : La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $\mathrm{F}(1) = 0$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = 2x = f(x)$ et $\mathrm{F}(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2.2. Calculs de primitives

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitives de la fonction f sur un intervalle I et k un réel, alors $k\mathrm{F}$ est une primitive de kf sur I.

2.2.1 Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$\mathrm{F}(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	*prochain cours*	sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{x}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n>1$)	$\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty;0[$ ou sur $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0;+\infty[$

Exemple : Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2$
   $F(x) = 3 \times \frac{1}{3}x^3 + C = x^3 + C$

2. $f(x) = x + \frac{3}{2}$
   $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + C$

3. $f(x) = (2x+1)(x-3)$
   Tout d'abord, développons $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x + 3$. Ainsi, une primitive est donnée par $F(x) = 2 \times \frac{1}{3}x^3 - 5 \times \frac{1}{2}x^2 + 3x + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + C$

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
   $F(x) = -\frac{1}{x} + C$

5. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$
   $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C$

6. $f(x) = \frac{1}{x^5}$
   $F(x) = -\frac{1}{4x^4} + C$

7. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
   $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$

8. $f(x) = \frac{6x^2 - 8x + 2}{5}$
   $F(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$

9. $f(x) = -\frac{6}{x^4}$
   $F(x) = -\frac{6}{3x^3} = -\frac{2}{x^3} + C$

2.2.2 Primitive des fonctions composées usuelles

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

conditions	fonction f	une primitive F est donnée par
n entier, $n > 0$	$f = u'u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I n entier, $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$

Exemple : Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (2x+1)^2$
   f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 2x+1$. On a $u'(x) = 2$ donc
   $$u'(x)u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x)$$
   Donc, une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^3}{3} = \frac{1}{6}(2x+1)^3$$

2. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
   f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$. On a $u'(x) = 1$ donc
   $$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-3x)^2}$

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-3x$. On a $u'(x) = -3$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} = -3f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{-3}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right) = \frac{1}{-3}\times\left(-\frac{1}{1-3x}\right) = \frac{1}{3(1-3x)}$$

4. $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$

f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = x^2-x+1$. On a $u'(x) = 2x-1$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x+2$. On a $u'(x) = 1$. Donc,

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}$$

3. Intégrale d'une fonction continue

3.1. Définition

Définition 4 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

Remarque :

- La différence $F(b)-F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

- Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple :

- $\displaystyle\int_1^3 3t^2+2t-1\,\mathrm{d}t = \left[t^3+t^2-t\right]_1^3 = \left(3^3+3^2-3\right)-\left(1^3+1^2-1\right) = 33-1 = 32$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Proposition 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. Soit F une primitive de f sur I. On a alors :

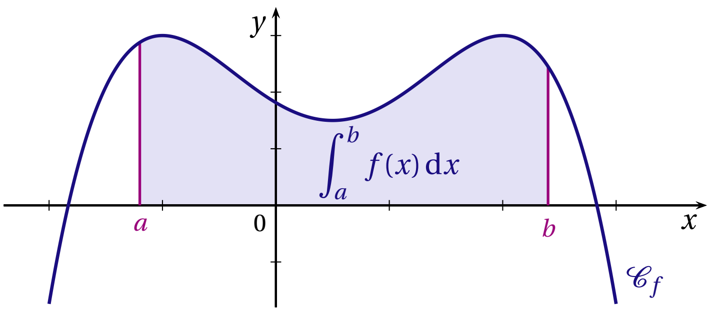
$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

3.2. Premières propriétés

Proposition 2 :

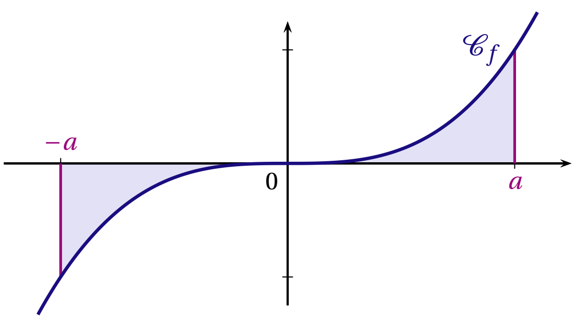
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors :

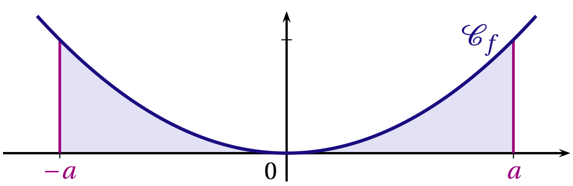
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



Proposition 3 :

- Si f est continue et paire sur $[-a;a]$, alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a;a]$ alors : $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.





Exemple :

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^2+|t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^2+t\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

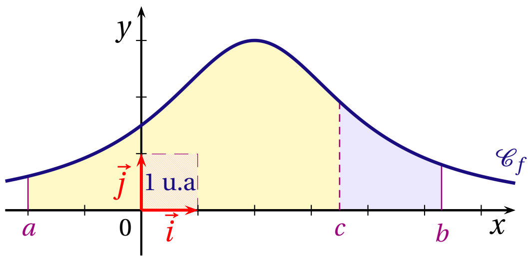
Proposition 4 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=c$ et $x=b$.



Proposition 5 : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel α, on a :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple : Soit a un réel et f la fonction définie sur $[-1;1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{2} & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1+a}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1+a}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-a}{2}\int_{-1}^{0} 1\,\mathrm{d}x + \frac{1+a}{2}\int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1-a}{2}\big[x\big]_{-1}^{0} + \frac{1+a}{2}\big[x\big]_0^1 \\ &= \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1 \end{aligned}$$

4. Exercices

11.1 Pour chacune des fonctions suivantes, donner une primitive et indiquer un intervalle sur lequel votre réponse est valide :

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
3. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3}$
4. $f_5(x) = (7x+1)^8$
5. $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
6. $f_8(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$

11.2 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

1. $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{2}$
2. $f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + 1$

11.3 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$

1. $f(x) = 3x + \dfrac{3}{x^2}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$

11.4 Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x - 1$ et $\mathrm{F}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{F}(1) = 0$.
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2} + 1$ et $\mathrm{F}(1) = 2$.
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x^2}$ et $\mathrm{F}(1) = -\dfrac{1}{4}$.
5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $\mathrm{F}(1) = 1$.

11.5 Soit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ et $\mathrm{G}(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$

Montrer que F et G sont deux primitives sur $]-1;+\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

11.6 Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-4x}{(2x^2+x-1)^2}$.

Montrer que la fonction G définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $G(x) = \dfrac{2x^2}{2x^2+x-1}$ est une primitive de la fonction f.

11.7 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

1. f est définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{(2x-1)^3}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(x^2+2x-3)^3$.
3. f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.
4. f est définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{4}{(1-2x)^2}$

11.8 Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} \left(x^2-3x+1\right) \mathrm{d}x$
2. $B = \displaystyle\int_{2}^{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right) \mathrm{d}x$

11.9 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3+x-2)\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t$

11.10 Montrer que la fonction F définie sur $]1;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2}$$

En déduire la valeur de

$$\int_2^3 \frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

11.11 Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 12x^2(x^3+1)^3$ est une primitive de la fonction f définie par

$$f(x) = (x^3+1)^4$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^1 (x^3+1)^4\,\mathrm{d}x$$

5. Corrigé des exercices

11.1

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 7 \\ \mathrm{F}(x) &= \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 7 \times x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x \end{aligned}$$

2. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ \mathrm{F}(x) &= \frac{x^3}{3} + \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

3. Je reconnais une forme usuelle que je préfère écrire $f(x) = x^{-3}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^3} = x^{-3} \\ \mathrm{F}(x) &= \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

4. f semble être de la forme $u' \times u^8$ avec $u(x) = 7x + 1$.
   On a $u'(x) = 7$ donc
   $$u'(x) \times u(x)^8 = 7 \times (7x+1)^8 = 7f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{7} \times \frac{u(x)^9}{9} = \frac{1}{63} \times (7x+1)^9.$$

5. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^4}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$.
   On a $u'(x) = 2x + 1$ donc
   $$\frac{u'(x)}{u(x)^4} = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4} = f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$\mathrm{F}(x) = -\frac{1}{3u(x)^3} = -\frac{1}{3\left(x^2+x+1\right)^3}.$$

6. f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^3 + 1$.
   On a $u'(x) = 3x^2$ donc
   $$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}} = 3f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}.$$

11.2

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{F}(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \times x = x^3 + \frac{1}{2}x$$

2. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = x^3 - 4x + \sqrt{2}$$
$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^4}{4} - 4 \times \frac{x^2}{2} + \sqrt{2} \times x = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \sqrt{2}x$$

3. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1$$
$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + x$$

11.3

1. Il ne s'agit pas d'un polynôme mais d'une somme donc je peux quand même primitiver terme à terme.

$$f(x) = 3x + \frac{3}{x^2}$$
$$\mathrm{F}(x) = 3 \times \frac{x^2}{2} + 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{x}$$

2. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2} = x - 2 + \frac{1}{x^2}$$
$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \times x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{x}$$

3. Ce n'est pas une forme usuelle donc je simplifie pour obtenir une somme.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$\mathrm{F}(x) = x - 2 \times 2\sqrt{x} = x - 4\sqrt{x}$$

11.4 Cette fois, on ne me demande pas *une* primitive mais *la* primitive vérifiant une condition supplémentaire. Il faudra donc trouver l'ensemble des primitives, puis exhiber celle qui satisfait la condition souhaitée.

1. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2} - 1 \times x + \mathrm{C} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \mathrm{C}$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$\mathrm{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{C} = -\frac{1}{24} - \frac{5}{8} + \frac{1}{2} + \mathrm{C} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \mathrm{C}$$

Ainsi $\mathrm{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \iff \mathrm{C} = \frac{2}{3}$ et

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{2}{3}.$$

2. Il s'agit d'un polynôme donc je primitive terme à terme.

$$\mathrm{F}(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} - 5 \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \times x + \mathrm{C} = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \mathrm{C}$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$\mathrm{F}(1) = 1^3 - \frac{5}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 1 + \mathrm{C} = 1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \mathrm{C} = \mathrm{C} - 1$$

Ainsi $\mathrm{F}(1) = 0 \iff \mathrm{C} = 1$ et

$$\mathrm{F}(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

3. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} - \left(-\frac{1}{x}\right) + 1 \times x + \mathrm{C} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + x + \mathrm{C}$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$\mathrm{F}(1) = \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{1} + 1 + \mathrm{C} = \frac{1}{2} + 2 + \mathrm{C}$$

Ainsi $\mathrm{F}(1) = 2 \iff \mathrm{C} = -\frac{1}{2}$ et

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{2}.$$

4. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^4}{4} + 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) + \mathrm{C} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x} + \mathrm{C}$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$\mathrm{F}(1) = \frac{1}{4} \times 1^4 - \frac{2}{1} + \mathrm{C} = -\frac{7}{4} + \mathrm{C}$$

Ainsi $\mathrm{F}(1) = -\frac{1}{4} \iff \mathrm{C} = \frac{3}{2}$ et

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}.$$

5. Il s'agit d'une somme donc je primitive terme à terme.

$$F(x) = 2 \times \frac{x^4}{4} - 1 \times x - \left(-\frac{1}{x}\right) + C = \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{x} + C$$

Je calcule l'image en fonction de C puis je résous l'équation.

$$F(1) = \frac{1}{2} \times 1^4 - 1 + \frac{1}{1} + C = \frac{1}{2} + C$$

Ainsi $F(1) = 1 \iff C = \frac{1}{2}$ et

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

11.5 Dire que F et G sont deux primitives d'une même fonction f signifie que qu'elles ont toutes les deux pour dérivée f. Il me suffit donc de dériver F et G puis de remarquer que $F' = G'$. Ce sera alors ma fonction f.
On a $F = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = x + 1$.
Alors $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = 1$, et $F' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, *i.e*

$$F'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + x + 1 - x^2 - x - 1}{(x+1)^2},$$

donc

$$F'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

On a $F'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.
$G(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$ est une somme que je dérive terme à terme.

$$G'(x) = 1 - 0 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

On a bien montré que $F' = G'$, donc que F et G sont bien deux primitives de la même fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

11.6 Plutôt que de montrer que G est une primitive de f, je préfère montrer que f est la dérivée de G *(c'est équivalent et bien plus facile)*.
On a $G = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x^2$ et $v(x) = 2x^2 + x - 1$.
Alors $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = 4x + 1$, et $G' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, *i.e*

$$G'(x) = \frac{4x \times (2x^2 + x - 1) - 2x^2 \times (4x+1)}{(2x^2 + x - 1)^2 = \frac{4x \times (x-1) - 2x^2}{(2x^2+x-1)^2}},$$

donc

$$G'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(2x^2 + x - 1)^2} = f(x).$$

On a bien montré que $G' = f$, donc que f est la dérivée de G, donc que G est une primitive de f.

11.7

1. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^3}$avec $u(x) = 2x - 1$. On a $u'(x) = 2$ donc
$$\frac{u'(x)}{u(x)^3} = \frac{2}{(2x-1)^3} = \frac{2}{3} \times f(x).$$
Donc une primitive de f est donnée par
$$\mathrm{F}(x) = \frac{3}{2} \times \frac{-1}{2u(x)^2} = -\frac{3}{4\,(2x-1)^2}.$$

2. f semble être de la forme $u' \times u^3$avec $u(x) = x^2 + 2x - 3$. On a $u'(x) = 2x + 2$ donc
$$u'(x) \times u(x)^3 = (2x+2) \times (x^2+2x-3)^3 = 2f(x).$$
Donc une primitive de f est donnée par
$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^4}{4} = \frac{1}{8} \times \left(x^2 + 2x - 3\right)^4.$$

3. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2 - 1$. On a $u'(x) = 2x$ donc
$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2} = 2f(x).$$
Donc une primitive de f est donnée par
$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u(x)} = -\frac{1}{2\left(x^2-1\right)}.$$

4. f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$avec $u(x) = 1 - 2x$. On a $u'(x) = -2$ donc
$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-2}{(1-2x)^2} = -\frac{1}{2} \times f(x).$$
Donc une primitive de f est donnée par
$$\mathrm{F}(x) = -2 \times \frac{-1}{u(x)} = \frac{2}{1-2x}.$$

11.8

1. Une primitive de la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est donnée par
$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 1 \times x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x.$$
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (x^2 - 3x + 1)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}2^3 - \frac{3}{2}2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 + (-1)\right) \\ &= \left(\frac{8}{3} - 6 + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 1\right) = 3 - 3 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. Une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1$ est donnée par

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3} - 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) - 1 \times x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{x} - x.$$

$$\int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{x} - x\right]_2^6 = \left(\frac{1}{6}6^3 + \frac{2}{6} - 6\right) - \left(\frac{1}{6}2^3 + \frac{2}{2} - 2\right)$$
$$= \left(36 + \frac{1}{3} - 6\right) - \left(\frac{4}{3} + 1 - 2\right) = 31 - 1 = 30$$

11.9

1. Une primitive de la fonction $f(x) = x^3 + x - 2$ est donnée par

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2 \times x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

$$\int_{-2}^3 (x^3 + x - 2)\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^3 = \left(\frac{1}{4}3^4 + \frac{1}{2}3^2 - 2 \times 3\right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 2 \times 2\right)$$
$$= \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} - 6\right) - (4 + 2 + 4) = \frac{99}{4} - 16 = \frac{35}{4}$$

2. Il faut trouver une primitive à $f(x) = \sqrt{2x+3} = (2x+3)^{\frac{1}{2}}$.
f semble être de la forme $u' \times u^{\frac{1}{2}}$avec $u(x) = 2x+3$. On a $u'(x) = 2$ donc

$$u'(x) \times u(x)^{\frac{1}{2}} = 2 \times (2x+3)^{\frac{1}{2}} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \times (2x+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}.$$

$$\int_3^{11} \sqrt{2x+3}\underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \left[\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}\right]_3^{11} = \left(\frac{2 \times 11 + 3}{3}\sqrt{2 \times 11 + 3}\right) - \left(\frac{2 \times 3 + 3}{3}\sqrt{2 \times 3 + 3}\right)$$
$$= \frac{25}{3} \times 5 - \frac{9}{3} \times 3 = \frac{125 - 27}{3} = \frac{98}{3}$$

3. Il faut trouver une primitive à $f(t) = \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}$.
f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$avec $u(t) = t^5 + 3$. On a $u'(t) = 5t^4$ donc

$$u'(t) \times \sqrt{u(t)} = \frac{5t^4}{\sqrt{t^5+3}} = 5f(t).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\mathrm{F}(t) = \frac{1}{5} \times 2\sqrt{u(t)} = \frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}.$$

$$\int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\underset{\cdot}{\mathrm{t}} = \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}\right]_0^1 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{1^5+3}\right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt{0^5+3}\right)$$
$$= \frac{2}{5} \times 2 - \frac{2}{5} \times \sqrt{3} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{5}$$

11.10 Je préfère montrer que f est la dérivée de F.
On a $\mathrm{F} = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = x^2 + 3x - 1$ et $v(x) = x - 1$.
Alors $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = 1$, et $\mathrm{F}' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, *i.e*

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{(2x+3)(x-1) - (x^2+3x-1)\times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 + x - 3 - x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2},$$

donc

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = f(x).$$

On a montré $\mathrm{F}' = f$, *i.e* f est la dérivée de F, *i.e* F est une primitive de f.
Donc une primitive de la fonction $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$ est donnée par

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}.$$

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} \underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \left[\frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}\right]_2^3 = \left(\frac{3^2 + 3\times 3 - 1}{3 - 1}\right) - \left(\frac{2^2 + 3\times 2 - 1}{2 - 1}\right)$$
$$= \frac{17}{2} - 9 = -\frac{1}{2}$$

11.11 Je préfère montrer que f est la dérivée de F.
On a $\mathrm{F} = u^4$, avec $u(x) = x^3 + 1$.Alors $u'(x) = 3x^2$ et $\mathrm{F}' = 4u'u^3$, *i.e*

$$\mathrm{F}'(x) = 4 \times 3x^2 \times (x^3 + 1)^3 = f(x).$$

On a montré $\mathrm{F}' = f$, *i.e* f est la dérivée de F, *i.e* F est une primitive de f.
Donc une primitive de $f(x) = 12x^2(x^3+1)^3$ est $\mathrm{F}(x) = (x^3+1)^4$.

$$\int_0^1 12x^2(x^3+1)^3 \underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \left[\left(x^3+1\right)^4\right]_0^1 = \left(1^3+1\right)^4 - \left(0^3+1\right)^4 = 16 - 1 = 15$$

---

6. Table des matières