

EXERCICES — CHAPITRE 4

Exercice 1 (★) – On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 5\sqrt{n} - 3 \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{2}{n+1} + 1.$$

1. Calculer les deux premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le quinzième terme de chaque suite.

Exercice 2 (★) – On considère les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 1 \quad \text{et} \quad v_1 = 5 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{2}{n}.$$

Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.

Exercice 3 (★) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Calculer u_0 et u_{10} .
2. Exprimer $u_n + 1$ et u_{n+1} en fonction de n .

Exercice 4 (★) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer u_{10} .

Exercice 5 (★★) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

1. On donne $u_0 = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$. Calculer u_{13} .
2. On donne $u_{36} = 86$ et $r = 2$. Calculer u_0 .
3. On donne $u_2 = 2$ et $u_{15} = 67$. Calculer r et u_1 .
4. On donne $u_8 = 34$ et $r = 3$. Calculer u_1 .

Exercice 6 (★) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer u_5 .

Exercice 7 (★★) – Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

1. On donne $u_0 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_7 .
2. On donne $u_1 = 2$ et $q = \frac{3}{2}$. Calculer u_5 .
3. On donne $u_4 = 7$ et $q = \frac{1}{3}$. Calculer u_1 .
4. On donne $u_2 = 4$ et $u_4 = \frac{16}{9}$. Calculer q . (On suppose $q > 0$.)

Exercice 8 (★★) – On suppose que chaque année, la production d'une usine subit une baisse de 4%. Au cours de l'année 2020, la production a été de 25000 unités.

1. On note $P_0 = 25000$ et P_n la production au cours de l'année 2020 + n .
Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Calculer la production de l'usine en 2025.
Indication numérique : $0.96^5 \approx 0.82$.

Exercice 9 (★★) – On place un capital $u_0 = 1500$ euros à 4.5% par an avec intérêts simples. On note u_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
3. Au bout de combien d'années, le capital initial aura-t-il doublé?

Exercice 10 (★★) – On place un capital $u_0 = 3500$ euros à 3% par an avec intérêts composés. On note u_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et exprimer u_n en fonction de n .
2. Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
Indication numérique : $1.03^{10} \approx 1.34$.

Exercice 11 (★★) – On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 2u_n$ pour tout entier naturel n .

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle arithmétique? géométrique?
3. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + 1$.
 - (a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 et v_4 .
 - (b) Justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
 - (c) Donner l'expression de v_n en fonction de n .
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 12 (★★) – La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2020 et a enregistré 2500 inscriptions en 2020. On estime que, chaque année, 80% des anciens inscrits renouveleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents. On modélise cette situation par une suite numérique $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2020 et a_n le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2020 + n$.

1. (a) Calculer a_1 et a_2 .
(b) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a la relation $a_{n+1} = 0.8 \times a_n + 400$.
2. On pose pour tout entier naturel n , $u_n = a_n - 2000$.
 - (a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0.8$ et de premier terme $u_0 = 500$.
 - (b) En déduire que le terme général de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $a_n = 500 \times 0.8^n + 2000$.

Exercice 13 (★★) – Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}$ | 4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 50$ |
| 2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{10}{1024}$ | 5. $S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 13^2 + 14^2$ |
| 3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots + \frac{a^n}{n}$ | 6. $S_6 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125$ |

Exercice 14 (★★) – Développer chacune des sommes écrites à l'aide du symbole Σ , en faisant disparaître ce symbole.

$$1. T_1 = \sum_{k=3}^{10} \frac{1}{k^2} \quad \left| \quad 2. T_2 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1} \right.$$

Exercice 15 (★★) –

1. Calculer la somme

$$S = -2 + 2 + 6 + 10 + \dots + 98 + 102 + 106.$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$. Calculer

$$T = \sum_{k=0}^{10} u_k.$$

Exercice 16 (★★) – Calculer les sommes S et T .

$$1. S = 2 + 6 + 18 + \dots + 118098 \quad \left| \quad 2. T = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{59049} \right.$$

Exercice 17 (★★) – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$. Calculer S_{10} .

Exercice 18 (★★) – Une entreprise propose pour recruter un nouvel employé un salaire annuel de 21000 euros avec augmentation annuelle du salaire de 4% tous les ans. On note s_n le salaire annuel pour l'année n . On a donc $s_1 = 21000$.

1. Calculer s_2 et s_3 .
2. Donner la nature de la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ et exprimer s_n en fonction de n .

3. Justifier que $\sum_{k=1}^5 s_k \approx 115500$.

Indication numérique : $1.04^5 \approx 1.22$.

4. Si cet employé reste 20 ans dans l'entreprise, calculer la somme des salaires perçus durant ces 20 ans. En déduire son salaire annuel moyen sur ces 20 ans.

Indication numérique : $1.04^{20} \approx 2.19$.