

EXERCICES — CHAPITRE 13

Exercice 1 (★★) – Simplifier les écritures suivantes.

$$1. A = (e^x)^2 - \frac{1}{e^{-2x}}$$

$$2. B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$3. C = e^{-x} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^x} \right)$$

$$4. D = \frac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}$$

$$5. E = \frac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}}$$

$$6. F = \ln(e^{2x+1} \times e^{2-x})$$

$$7. G = \frac{e^{2x+\ln(2)}}{e^{-x}}$$

$$8. H = \frac{e^{x+\ln(8)}}{e^{x-\ln(2)}}$$

Exercice 2 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

$$1. e^{x^2+x-1} = 1$$

$$2. \frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$$

$$3. 2e^{2x} - e^x - 1 = 0$$

$$4. \ln(e^{x+1}) = e^{x+1} + x$$

$$5. e^{\ln(x^2+1)} - \ln(e^{1-x^2}) = \frac{1}{2}$$

$$6. \ln(e^{-x}) + e^{-\ln(x)} = 0$$

Exercice 3 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

$$1. e^{\frac{1}{x}} \geq e$$

$$2. e^{2x} \leq e^x$$

$$3. e^{2x} e^{x^2} < 1$$

$$4. e^{x^2-10x+21} \geq 1$$

Exercice 4 (★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$1. f(x) = e^{2x} - 1$$

$$2. f(x) = xe^x - 2$$

$$3. f(x) = 4 - 2x + e^x$$

$$4. f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$5. f(x) = e^{-x}$$

$$6. f(x) = \frac{1}{x} + 1 - 3e^x$$

$$7. f(x) = \frac{e^x + 1}{x^2 - x}$$

$$8. f(x) = \exp\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$$

$$9. f(x) = e^{x^2-3x+1}$$

$$10. f(x) = (1 - 2x)e^x$$

$$11. f(x) = x + 1 + xe^x$$

$$12. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Exercice 5 (★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

$$1. f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x}$$

$$2. f(x) = \frac{2x}{e^x - 1}$$

$$3. f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

Exercice 6 (★★) – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$1. f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2$$

$$2. f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$$

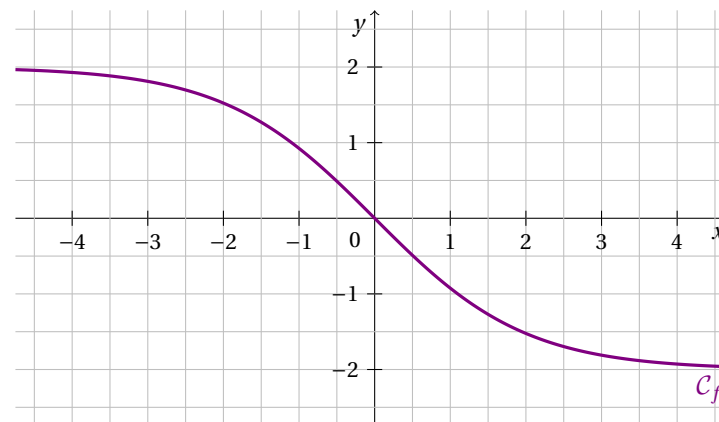
$$3. f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1}$$

Exercice 7 (★★★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 8 (★★★) – On a tracé ci-dessous, la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4}{1+e^x} - 2$.



1. (a) Calculer $f(-\ln(7))$ et $f(\ln(3))$.

(b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.

2. La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes?

3. (a) On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.

(b) Étudier les variations de la fonction f .

4. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\ln(3)$.

Exercice 9 (★★★) – Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de f .
3. En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.

Exercice 10 (★★★) – Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

1. (a) Montrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = (2x-5) \times e^{-x}$.
(b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Exercice 11 (★★★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (4-x)e^x - 2$.

1. (a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(b) La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes?
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
(b) Étudier les variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
4. Tracer les asymptotes, la tangente \mathcal{T} et la courbe \mathcal{C}_f .

Indication numérique: $e^2 \approx 7.4$ et $e^3 \approx 20.1$

Exercice 12 (★★★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f .
2. Montrer que $f(x) = \frac{4}{1+e^{-x}}$, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
3. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.
4. On appelle \mathcal{T} la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de \mathcal{T} .
5. Soit d la fonction définie sur \mathbb{R} par $d(x) = f(x) - (x+2)$.
(a) Vérifier que $d'(x) = \frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de d .
(b) Calculer $d(0)$ puis étudier le signe de $d(x)$.
(c) En déduire la position relative de \mathcal{C}_f et de \mathcal{T} .
6. Tracer les asymptotes trouvées à la question 2., la tangente en 0 et la courbe \mathcal{C}_f .

Exercice 13 (★★★) – BSB 2012 – Ex2

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = e^x - 1 + x.$$

1. (a) Montrer que g est croissante sur \mathbb{R} .
(b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}.$$

On note \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(b) Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.
(c) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}.$$

- (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées à la question 2..

4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel x , la relation

$$f''(x) = \frac{2-x}{e^x}.$$

Étudier la convexité de f .

5. Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .

Exercice 14 (★★★) – Calculer les intégrales suivantes.

$$\left. \begin{array}{l} 1. I_1 = \int_0^1 e^{3x} dx \\ 2. I_2 = \int_{-2}^2 e^x - e^{-x} dx \end{array} \right| \begin{array}{l} 3. I_3 = \int_0^1 e^{2x} + \frac{e^x}{4} dx \\ 4. I_4 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt \end{array}$$