

EXERCICES — CHAPITRE 13

Exercice 1 (★★) – Simplifier les écritures suivantes.

<p>1. $A = (e^x)^2 - \frac{1}{e^{-2x}}$</p> <p>2. $B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$</p> <p>3. $C = e^{-x} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^x} \right)$</p> <p>4. $D = \frac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}$</p>	<p>5. $E = \frac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}}$</p> <p>6. $F = \ln(e^{2x+1} \times e^{2-x})$</p> <p>7. $G = \frac{e^{2x+\ln(2)}}{e^{-x}}$</p> <p>8. $H = \frac{e^{x+\ln(8)}}{e^{x-\ln(2)}}$</p>
---	--

Exercice 2 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

<p>1. $e^{x^2+x-1} = 1$</p> <p>2. $\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$</p> <p>3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$</p>	<p>4. $\ln(e^{x+1}) = e^{x+1} + x$</p> <p>5. $e^{\ln(x^2+1)} - \ln(e^{1-x^2}) = \frac{1}{2}$</p> <p>6. $\ln(e^{-x}) + e^{-\ln(x)} = 0$</p>
---	---

Exercice 3 (★★) – Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

<p>1. $e^{\frac{1}{x}} \geq e$</p> <p>2. $e^{2x} \leq e^x$</p>	<p>3. $e^{2x} e^{x^2} < 1$</p> <p>4. $e^{x^2-10x+21} \geq 1$</p>
--	---

Exercice 4 (★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

<p>1. $f(x) = e^{2x} - 1$</p> <p>2. $f(x) = xe^x - 2$</p> <p>3. $f(x) = 4 - 2x + e^x$</p> <p>4. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$</p> <p>5. $f(x) = e^{-x}$</p>	<p>6. $f(x) = \frac{1}{x} + 1 - 3e^x$</p> <p>7. $f(x) = \frac{e^x + 1}{x^2 - x}$</p> <p>8. $f(x) = \exp\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$</p>	<p>9. $f(x) = e^{x^2-3x+1}$</p> <p>10. $f(x) = (1-2x)e^x$</p> <p>11. $f(x) = x + 1 + xe^x$</p> <p>12. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$</p>
---	--	--

Exercice 5 (★★) – Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0.

<p>1. $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x}$</p>	<p>2. $f(x) = \frac{2x}{e^x - 1}$</p>	<p>3. $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$</p>
--	--	---

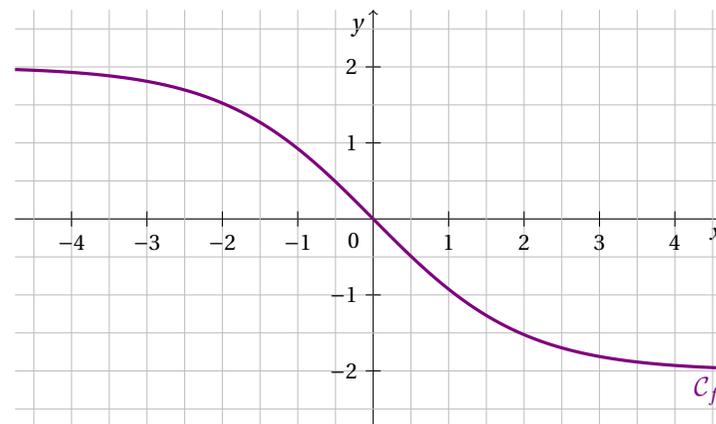
Exercice 6 (★★) – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2$
2. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$
3. f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1}$

Exercice 7 (★★★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x^3-15x^2+36x-25}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 8 (★★★) – On a tracé ci-dessous, la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4}{1+e^x} - 2$.



1. (a) Calculer $f(-\ln(7))$ et $f(\ln(3))$.
 (b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = 0$.
2. La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes?
3. (a) On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
 (b) Étudier les variations de la fonction f .
4. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $\ln(3)$.

Exercice 9 (★ ★ ★) – Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de f .
3. En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.

Exercice 10 (★ ★ ★) – Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

1. (a) Montrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = (2x-5) \times e^{-x}$.
(b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Exercice 11 (★ ★ ★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (4-x)e^x - 2$.

1. (a) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(b) La courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f admet-elle des asymptotes?
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
(b) Étudier les variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
4. Tracer les asymptotes, la tangente \mathcal{T} et la courbe \mathcal{C}_f .

Indication numérique: $e^2 \approx 7.4$ et $e^3 \approx 20.1$

Exercice 12 (★ ★ ★) – Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$.

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f .
2. Montrer que $f(x) = \frac{4}{1+e^{-x}}$, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
3. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variation.
4. On appelle \mathcal{T} la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de \mathcal{T} .
5. Soit d la fonction définie sur \mathbb{R} par $d(x) = f(x) - (x+2)$.
(a) Vérifier que $d'(x) = \frac{-(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de d .
(b) Calculer $d(0)$ puis étudier le signe de $d(x)$.
(c) En déduire la position relative de \mathcal{C}_f et de \mathcal{T} .
6. Tracer les asymptotes trouvées à la question 2., la tangente en 0 et la courbe \mathcal{C}_f .

Exercice 13 (★ ★ ★) – BSB 2012 – Ex2

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = e^x - 1 + x.$$

1. (a) Montrer que g est croissante sur \mathbb{R} .
(b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x , le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x}.$$

On note \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(b) Montrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.
(c) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}.$$

- (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées à la question 2..

4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel x , la relation

$$f''(x) = \frac{2-x}{e^x}.$$

Étudier la convexité de f .

5. Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .

Exercice 14 (★ ★ ★) – Calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|--|--|
| 1. $I_1 = \int_0^1 e^{3x} dx$ | 3. $I_3 = \int_0^1 e^{2x} + \frac{e^x}{4} dx$ |
| 2. $I_2 = \int_{-2}^2 e^x - e^{-x} dx$ | 4. $I_4 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ |