SEMAINE 10

Exercice 1

On considère un dé à 10 faces numérotées de 0 à 9. Le dé est truqué selon la loi de probabilité suivante :

issue	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - A : « le dé tombe sur un chiffre impair »
   - B : « le dé tombe sur le chiffre 1, 4, 7 ou 9 »
   - C : « le dé tombe sur un chiffre inférieur ou égal à 4 »
2. Déterminer la probabilité des évènements $A \cup B$, $B \cap C$ et $A \cap C$.

Exercice 2

On s'intéresse aux résultats d'un concours que l'on ne peut pas passer plus de deux fois.
Les statistiques dressées à partir des résultats de la session de mai 2013 ont permis d'établir que :
- 60% des personnes qui présentaient le concours le présentaient pour la première fois ;
- 10% de ceux qui le présentaient pour la première fois ont été admis ;
- 40% de ceux qui le présentaient pour la seconde fois l'ont réussi.

On interroge au hasard une personne parmi toutes celles ayant passé ce concours en mai 2013. On note :
- C_1 l'évènement : « La personne présentait le concours pour la première fois » ;
- R l'évènement : « La personne a été reçue à ce concours ».

On note $\bar{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A.

1. Déterminer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}_{C_1}(R)$; $\mathbb{P}_{\bar{C_1}}(R)$ et $\mathbb{P}(C_1)$. Aucune justification n'est attendue.
2. Déterminer la probabilité que cette personne se soit présentée au concours pour la première fois et ait été admise.
3. Montrer que la probabilité que cette personne ait été admise à ce concours en mai 2013 est de 0.22.
4. Sachant que cette personne a réussi le concours, déterminer la probabilité qu'elle l'ait présenté pour la première fois. Donner une valeur arrondie au centième.

Exercice 3

Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif est de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.

On considère deux types d'appartement :
- Les appartements d'une ou deux pièces notés respectivement $T1$ et $T2$;
- Les appartements de plus de deux pièces.

Une étude des dossiers d'appartements loués dans un secteur ont montré que :
- 35 % des appartements loués sont de type $T1$ et $T2$;
- 45 % des appartement loués de type $T1$ ou $T2$ sont rentables ;
- 30 % des appartements loués, qui ne sont ni de type $T1$ ni de type $T2$, sont rentables.

On choisit un dossier au hasard et on considère les évènements suivants :

- T : "*l'appartement est de type* $T1$ *ou* $T2$" ;
- R : "*l'appartement loué est rentable*" ;
- $\overline{T}$ est l'évènement contraire de T et $\overline{R}$ est l'évènement contraire de R.

1. Calculer la probabilité que l'appartement soir rentable.
2. On suppose que l'appartement est rentable. Calculer la probabilité que l'appartement soit de type de $T1$ ou $T2$.

Exercice 4

A une sortie d'autoroute, la gare de péage comporte trois voies.
Une étude statistique a montré que :

- 28 % des automobilistes empruntent la voie de gauche, réservée aux abonnées ; un automobiliste empruntant cette voie franchit toujours le péage en moins de 10 secondes ;
- 52 % des automobilistes empruntent la voie du centre, réservée au paiement par carte bancaire ; parmi ces derniers, 75 % franchissent le péage en moins de 10 secondes ;
- les autres automobilistes empruntent la voie de droite en utilisant un autre moyen de paiement *(pièces ou billets)*.

On choisit un automobiliste au hasard et on considère les évènements suivants :

- G : "*l'automobiliste emprunte la voie de gauche*" ;
- C : "*l'automobiliste emprunte la voie du centre*" ;
- D : "*l'automobiliste emprunte la voie de droite*" ;
- T : "*l'automobiliste franchit le péage en moins de* 10 *secondes*".

On note $\overline{T}$ l'évènement contraire de l'évènement T.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(C \cap T)$.
2. L'étude a aussi montré que 70 % des automobilistes passent le péage en moins de 10 secondes.
   (a) Justifier que $\mathbb{P}(D \cap T) = 0,03$.
   (b) Calculer la probabilité qu'un automobiliste empruntant la voie de droite passe le péage en moins de 10 secondes.

Exercice 5

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae... dont certaines sont interprétées en français.
Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.
Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode "*lecture aléatoire*" : les chansons écoutés sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.
Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.
On note :

— R l'évènement : "*la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock*" ;
— F l'évènement : "*la chanson écoutée est interprétée en français*".

1. Calculer $p(R)$, la probabilité de l'évènement R.
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.

3. Parmi toutes les chansons enregistrées $38,5\,\%$ sont interprétées en français.
   Montrer que : $\mathbb{P}\big(F \cap \overline{R}\big) = 0,28$
4. En déduire $\mathbb{P}_{\overline{R}}\big(F\big)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

Exercice 6

On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules rouges, toutes indiscernables au toucher.

1. On tire successivement trois boules dans l'urne, sans remettre la boule tirée après chaque tirage.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2. On tire successivement trois boules dans l'urne, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?

Exercice 7

On tire successivement trois boules (sans remise) dans une urne qui contient 3 boules blanches et 7 boules noires. Pour tout $k \in \{1; 2; 3\}$, on note B_k l'évènement « la k-ième boule tirée est blanche ». Calculer la probabilité pour que les trois boules tirées soient blanches.

Exercice 8

Une maladie rare touche un individu sur 1000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour $0,5\%$ des individus sains.
Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ?

Exercice 9

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, et on note $p_n = \mathbb{P}(V_n)$. L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant est également positif avec une probabilité $0,6$;
- si un sondage est négatif, le suivant est également négatif avec une probabilité $0,9$.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que : $p_1 = 1$.

1. Calculer $\mathbb{P}(V_2)$ et $\mathbb{P}(V_3)$.
2. Calculer la probabilité que les trois premiers sondages soient positifs.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que :
$$p_{n+1} = 0,5p_n + 1$$
4. On pose $q_n = p_n - 2$. Montrer que (q_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme.
5. Déterminer l'expression de q_n puis de p_n en fonction de n.

Exercice 10

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Une salarié malade est toujours absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n, le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n, le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

1. Déterminer la valeur de p_3.
2. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait aussi été absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1
$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$$
4. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

Exercice 11

Léa débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est $0,6$; si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est $0,7$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— G_n l'évènement « Léa gagne la n-ième partie » ;

— P_n l'évènement « Léa perd la n-ième partie »

Partie I :

1. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(G_1$, $\mathbb{P}_{G_1}(G_2)$ et $\mathbb{P}_{P_1}(G_2)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(G_2)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(P_2)$.

Partie II :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathbb{P}(G_n)$.

1. Déterminer $\mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1})$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_{n+1} = 0,3x_n + 0,3$$
3. On pose $u_n = x_n + \frac{3}{2}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

Exercice 12

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée.
Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.

- si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est $0,7$;
- si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est $0,8$.
- Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites.

Partie I : On choisit un vélo au hasard et on considère les évènements :

- E_1 : « le vélo est situé sur le site A la première journée » ;
- E_2 : « le vélo est situé sur le site A la deuxième journée ».

1. Quelle est la probabilité pour que le vélo soit ramené sur le site A la seconde journée ?
2. On constate que le vélo a été ramené sur le site A la seconde journée. Quelle est la probabilité qu'il se soit trouvé sur le site B la veille ?

Partie II : Pour tout entier n, on note E_n l'évènement « le vélo se situe sur le site A la n-ième journée » et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

1. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$$
2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = p_n - 0,4$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Donner l'expression de p_n en fonction de n.

Exercice 13

Chaque jour, un allumeur de réverbère se demande s'il va allumer son réverbère. S'il est allumé, il l'éteint dans 30% des cas. S'il est éteint, il l'allume une fois sur deux. Le premier jour, le réverbère est allumé. On note p_n la probabilité que le réverbère soit allumé le n-ième jour.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,5$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = p_n - 0,625$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.