INTERRO DE COURS – NUMÉRO 9

Exercice 1 –

1. Combien y a-t-il d'entiers dans l'intervalle $[\![a;b]\!]$?

Solution : Il y a $b-a+1$ entiers dans l'intervalle $[\![a;b]\!]$.

2. Donner, sans la démontrer, la valeur des sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^{n} k$

Solution : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} k^2$

Solution : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Solution : Si $q \neq 1$, on a : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 2 – Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (5k-1)$

Solution :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} (5k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 5k + \sum_{k=0}^{n} (-1) \qquad \text{par linéarité de la somme} \\
&= 5\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 5\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
&= (n+1)\left(\frac{5n}{2} - 1\right) \\
&= \frac{(n+1)(5n-2)}{2}.
\end{aligned}$$

2. $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^{k+1}}{2^k}$

Solution :

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3\times 3^k}{2^k} \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= 3\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}\right) \\
&= 3\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 3\times\left(-\frac{2}{1}\right)\times\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) \\
&= -6\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

3. $U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k^2+3k-5}{k-1}$ (*indication : on pourra procéder au changement d'indice* $j = k-1$).

Solution :

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k^2+3k-5}{k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{2(j+1)^2+3(j+1)-5}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{2(j^2+2j+1)+3j+3-5}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{2j^2+7j}{j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (2j+7) \\
&= 2\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 7 \\
&= 2\frac{n(n+1)}{2} + 7(n+1) \\
&= (n+1)(n+7)
\end{aligned}$$