INTERRO DE COURS – NUMÉRO 8

Exercice 1 –

1. Déterminer les solutions complexes des équations suivantes :

$$iz^2+3iz-5-3i=0 \qquad \text{et} \qquad (1+i)z^2-(2-4i)z+5+3i=0$$

Solution : Calculons le discriminant de la première équation :

$$\Delta=(3i)^2-4\times i\times(-5-3i)=-9+20i-12=-21+20i$$

Cherchons une racine carrée de Δ sous la forme $\delta=a+ib$. On a alors :

$$\delta^2=\Delta \iff \begin{cases} a^2-b^2=-21\\ 2ab=20\\ a^2+b^2=\sqrt{21^2+20^2}=\sqrt{841}=29\end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2=8\\ 2ab=20\end{cases} \iff \begin{cases} a=\pm 2\\ b=\pm 5\end{cases}$$

Ainsi, la première équation admet deux solutions :

$$z_1=\frac{-3i+2+5i}{2i}=\frac{1+i}{i}=1-i \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-3i-2-5i}{2i}=-4+i$$

Calculons maintenant le discriminant de la deuxième équation :

$$\Delta=(2-4i)^2-4(1+i)(5+3i)=4-16-16i-4(5+3i+5i-3)=-12-16i-8-32i=-20-48i$$

Cherchons une racine carrée de Δ sous la forme $\delta=a+ib$. On a alors :

$$\delta^2=\Delta \iff \begin{cases} a^2-b^2=-20\\ 2ab=-48\\ a^2+b^2=\sqrt{20^2+48^2}=\sqrt{2704}=52\end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2=32\\ 2ab=-48\end{cases} \iff \begin{cases} a=\pm 4\\ b=\mp 6\end{cases}$$

Ainsi, la deuxième équation admet deux solutions :

$$z_1=\frac{2-4i+4-6i}{2(1+i)}=\frac{3-5i}{1+i}=-1-4i \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{2-4i-4+6i}{2(1+i)}=\frac{-1+i}{1+i}=i$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=\sqrt{3}+i$.

Solution : On commence par mettre $\sqrt{3}+i$ sous forme algébrique :

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$$

Soit $z\in\mathbb{C}$. On a alors :

$$z^3=\sqrt{3}+i \iff z=\sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{18}}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ avec } k\in[\![0;2]\!]$$

Ainsi, $S=\left\{\sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{18}}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{3}}\,;\,k\in[\![0;2]\!]\right\}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.

Solution : De même, on commence par mettre $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$ sous forme trigonométrique :

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2} = \frac{\left(2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4}{\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \frac{16\,\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}}{2\,\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}}} = 8\,\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{6}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2} \iff z = \sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}} \text{ avec } k \in [\![0;4]\!]$$

Ainsi, $S = \left\{\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}\,;\, k \in [\![0;4]\!]\right\}$.