INTERRO DE COURS – NUMÉRO 7

Exercice 1 – On définit l'application : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{3}{5} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{2}{5} \right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{-5x+3} \end{array} \right.$. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Solution : Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$, montrons que l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$ et déterminons-la. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$, on a :

$$f(x) = y \iff \frac{2x+1}{-5x+3} = y \iff 2x+1 = y(-5x+3) \iff x(2+5y) = 3y-1.$$

Or $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$ donc $2+5y \neq 0$, ainsi $x = \dfrac{3y-1}{2+5y}$. Il reste à vérifier que $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $x = \frac{3}{5}$. On a alors :

$$x = \frac{3}{5} \iff \frac{3y-1}{2+5y} = \frac{3}{5} \iff 5(3y-1) = 3(2+5y) \iff -5 = 6 \quad \text{Absurde.}$$

Ainsi $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$ admet bien un unique antécédent.
On en conclut que f est bijective sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$ et sa bijection réciproque f^{-1} est définie de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{5}\}$ par

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2+5x}.$$

Exercice 2 – Montrer que la fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et que

$$\forall x \in]-1;1[, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solution : Pour tout $y \in]-1,1[$, sin est dérivable en $\mathrm{Arcsin}(y)$ et

$$\sin'(\mathrm{Arcsin}(y)) = \cos(\mathrm{Arcsin}(y)) = \sqrt{1-\sin(\mathrm{Arcsin}(y))^2} = \sqrt{1-y^2}.$$

Donc $\sin'(\mathrm{Arcsin}(y)) \neq 0$. On a donc que Arcsin est dérivable en y et

$$\mathrm{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sin'(\mathrm{Arcsin}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$