INTERRO DE COURS – NUMÉRO 5

Exercice 1 –

1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{2-3i}{4-5i} \qquad z_2 = (\sqrt{2}+2i)(3+\sqrt{2}i) \qquad z_3 = (1-i)^2(3+2i)$$

Solution : On a :

$$z_1 = \frac{2-3i}{4-5i} = \frac{(2-3i)(4+5i)}{16+25} = \frac{8+15}{41} + i\frac{10-12}{41} = \frac{23}{41} + i\frac{-2}{41}$$

$$z_2 = (\sqrt{2}+2i)(3+\sqrt{2}i) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + i(2+6) = \sqrt{2}+8i$$

$$z_3 = (1-i)^2(3+2i) = (1-2i-1)(3+2i) = -2i(3+2i) = 4-6i$$

2. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 6-2\sqrt{3}i \qquad z_2 = -1-i \qquad z_3 = \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$$

Solution : On commence par calculer le module de z_1 : $|z_1| = \sqrt{36+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. On cherche ensuite un argument θ de z_1. On doit avoir :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{6}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \theta \equiv -\frac{\pi}{6} \ [2\pi]$$

Ainsi, une écriture trigonométrique de z_1 est donnée par :

$$z_1 = 4\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Pour z_2, on peut écrire directement

$$z_2 = -1-i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{4}}$$

Pour z_3, déterminons une forme trigonométrique du numérateur et du dénominateur. On a :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Dès lors,

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}$$

Exercice 2 – Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1): \quad 2i\overline{z} = 1-i \qquad\qquad (E_2): \quad 2\overline{z}+3z = 1-2i$$

Solution : Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} 2i\overline{z} = 1-i &\iff 2i(x-iy) = 1-i \\ &\iff 2y+2ix = 1-i \\ &\iff \begin{cases} 2y = 1 \\ 2x = -1 \end{cases} \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}_{E_1} = \left\{-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right\}$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 2\overline{z}+3z = 1-2i &\iff 2(x-iy)+3(x+iy) = 1-2i \\ &\iff 5x+iy = 1-2i \\ &\iff \begin{cases} 5x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \\ &\iff x = \frac{1}{5} \qquad \text{et} \qquad y = -2 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S}_{E_2} = \left\{\frac{1}{5}-2i\right\}$.