INTERRO DE COURS – NUMÉRO 3

Exercice 1 – Compléter le formulaire ci-dessous :

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$	$\sin^2\theta = \dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	✗

$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$	$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ $\cos 2a=1-2\sin^2 a$	$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$
$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$	$\sin 2a=2\sin a\cos a$	$\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$	$\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$	$\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

$\cos(a)\cos(b)=\dfrac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$	$\sin(a)\sin(b)=\dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$

Exercice 2 – Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

1. $\sin(x)=\cos(x)$

Solution : Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(x)=\cos(x) &\iff \sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } \underbrace{0=\frac{\pi}{2}+2k\pi}_{\text{Impossible}}\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{aligned}$$

2. $\cos(2x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x\in\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff 2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ Ou } 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \text{avec} k\in\mathbb{Z}\\ &\iff x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \text{ Ou } 2x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \text{avec} k\in\mathbb{Z}\\ &\iff x\in\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}$

Solution : Les termes de l'équation sont bien définis pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On va factoriser l'expression par $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$. On a que

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \cos(\frac{\pi}{6})\cos(x) - \sin(\frac{\pi}{6})\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \cos(\frac{\pi}{6} + x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ Ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ Ou } x = -\frac{-5\pi}{12} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-5\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.