INTERRO DE COURS – NUMÉRO 3

Exercice 1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}$.

1. Comment se nomme une suite de cette forme ?

Solution : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

Solution : On commence par chercher le réel α vérifiant

$$\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}$$

On obtient $\alpha = -1$. On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 1$. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}(v_n - 1) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}v_n$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Comme $u_n = v_n - 1$, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

Exercice 2 – Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Comment se nomme une suite de cette forme ?

Solution : Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 .

2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Solution : On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est la suivante : $r^2 = 5r - 6$. Ce qui équivaut à $(r-2)(r-3) = 0$. Ainsi elle possède deux racines $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$ Déterminons λ et μ. On a :

$$u_0 = 1 = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad u_1 = 0 = 2\lambda + 3\mu$$

Ainsi $\lambda = 3$ et $\mu = -2$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$.