INTERRO DE COURS – NUMÉRO 2

Exercice 1 – Soit $A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 3\}$ et $B = \{(t-1; 2t-5) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = B$.

Solution : On procède par double inclusion.

- $A \subset B$: soit $(x,y) \in A$. Alors on a $2x - y = 3$. Posons $t = x+1 \in \mathbb{R}$, de sorte que $x = t-1$. Puisque $2x - y = 3$, on a $y = 2x - 3 = 2(t-1) - 3 = 2t - 5$. Ainsi, on a $(x,y) = (t-1, 2t-5)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Donc, $(x,y) \in C$.
- $B \subset A$: soit $(x,y) \in B$. Alors, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t-1$ et $y = 2t-5$. Dès lors, $2x - y = 2(t-1) - (2t-5) = 2t - 2 - 2t + 5 = 3$. Ainsi, on a bien $(x,y) \in A$.

Exercice 2 – Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $\sqrt{x^2-1} = 2x+3$
   Indication numérique : $\sqrt{6} \simeq 2,45$

Solution : L'équation (E) : $\sqrt{x^2-1} = 2x+3$ est bien définie si $x^2 - 1 \geqslant 0$, i.e si $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$. Soit $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$. Distinguons deux cas :

- Si $2x+3 < 00$, i.e si $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$ alors l'équation n'admet aucune solution puisqu'une racine carrée est par définition positive.
- Si $2x+3 \geqslant 0$, i.e si $x \in \left[-\frac{3}{2};-1\right] \cup [1;+\infty[$ (*on n'oublie pas de tenir compte du fait que* $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$), alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-1} = 2x+3 &\iff x^2 - 1 = (2x+3)^2 \\ &\iff x^2 - 1 = 4x^2 + 12x + 9 \\ &\iff 3x^2 + 12x + 10 = 0 \end{aligned}$$

Calculons le discriminant de cette équation : $\Delta = 144 - 120 = 24$. On a donc deux solutions possibles :

$$x_1 = \frac{-12-\sqrt{24}}{6} = \frac{-6-\sqrt{6}}{3} < -\frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-6+\sqrt{6}}{3} \in \left[-\frac{3}{2};-1\right]$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-6+\sqrt{6}}{3}\right\}}$

2. $|x-1| + |2x-3| \leqslant 7$

Solution : L'inéquation est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par une étude du signe des différents facteurs à l'intérieur des valeurs absolues.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	

- Si $x \geqslant \frac{3}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
|x-1|+|2x-3| \leqslant 7 &\iff x-1+2x-3 \leqslant 7\\
&\iff 3x-4 \leqslant 7\\
&\iff x \leqslant \frac{11}{3} \iff x \in \left[\frac{3}{2};\frac{11}{3}\right].
\end{aligned}$$

- Si $x \in \left[1;\frac{3}{2}\right]$, alors

$$\begin{aligned}
|x-1|+|2x-3| \leqslant 7 &\iff x-1-2x+3 \leqslant 7\\
&\iff -x+2 \leqslant 7\\
&\iff x \geqslant -5 \qquad\qquad \iff x\left[1;\frac{3}{2}\right]
\end{aligned}$$

- Si $x \leqslant -1$, alors

$$\begin{aligned}
|x-1|+|2x-3| \leqslant 7 &\iff -x+1-2x+3 \leqslant 7\\
&\iff -3x+4 \leqslant 7\\
&\iff x \geqslant -1 \iff x=1
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\left[1;\frac{11}{3}\right]}$.

3. $\frac{1}{x}+\frac{x}{x-3} \leqslant 2$

Solution : L'inéquation est bien définie pour $x \neq 0$ et $x \neq 3$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;3\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}+\frac{x}{x-3} \leqslant 2 &\iff \frac{1}{x}+\frac{x}{x-3}-2 \leqslant 0\\
&\iff \frac{x-3+x^2-2x(x-3)}{x(x-3)} \leqslant 0\\
&\iff \frac{-x^2+7x-3}{x(x-3)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

On établit maintenant le signe de chacun des facteurs de la fraction ci-dessus. Pour cela, calculons le discriminant du numérateur : $\Delta = 49-12 = 37$. Il y a donc deux racines distinctes : $x_1 = \frac{7+\sqrt{37}}{2} \simeq 6,5$ et $x_2 = \frac{7-\sqrt{37}}{2} \simeq 0,5$.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$			0			x_2			3			x_1			$+\infty$
$-x^2+7x-3$		$-$		|		$-$	0	$+$		|		$+$	0	$-$		
x		$-$		0		$+$	|	$+$		|		$+$	|	$+$		
$x-3$		$-$		|		$-$	|	$-$		0		$+$	|	$+$		
$\dfrac{-x^2+7x-3}{x(x-3)}$		$-$		||		$+$	0	$-$		||		$+$	0	$-$		

Donc, $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;0[\cup \left[\dfrac{7-\sqrt{37}}{2};3\right] \cup \left[\dfrac{7+\sqrt{37}}{2};+\infty\right[}$.