# Interro de cours – Numéro 13

**Exercice 1 –** Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_0^1 \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

**Solution :** On commence par linéariser la fonction $x \mapsto \cos^3(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^{3ix}+3\,\mathrm{e}^{ix}+3\,\mathrm{e}^{-ix}+\mathrm{e}^{-3ix}}{8} = \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 \cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{12}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}\sin(3)+\frac{3}{4}\sin(1) \end{aligned}$$

2. $I_2 = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

**Solution :** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Ainsi, par décomposition en élément simples, il existe $a$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1} &\iff \frac{1}{x^2-1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} \\ &\iff \frac{1}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1} \\ &\iff \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_2 = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 \left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(4)+\frac{1}{2}\ln(3) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

3. $I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

**Solution :** On a :

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(x^2+2x+1) + \frac{2}{x+1}\right]_0^1 \\ &= \ln(4)+1-2 = \ln(4)-1 \end{aligned}$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

**Solution :** On procède par double intégration par parties. Posons $u : x \mapsto x^2+1$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$, on a $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_4 &= \left[(x^2+1)\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\,\mathrm{e} - 1 - \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, par une nouvelle intégration par parties,

$$\int_0^1 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[2x\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{e} - \left[2\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 = 2\,\mathrm{e} - (2\,\mathrm{e}-2) = 2$$

Donc,

$$I_4 = 2\,\mathrm{e} - 1 - 2 = 2\,\mathrm{e} - 3$$

5. $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

**Solution :** La fonction $\theta \mapsto \sin(\theta)$ est de classe $C^1$ sur$[-\pi/2;\pi/2]$, à valeurs dans $[-1,1]$. Si on pose $t = \sin\theta$, on a en dérivant $dt = \cos(\theta)d\theta$. De plus, pour $\theta = -\pi/2$, on a $t=-1$ et pour $\theta = \pi/2$ , on a $t=1$. On a donc

$$\sqrt{1-x^2}dx = \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos(\theta)d\theta = |\cos\theta|\cdot\cos(\theta)d\theta = \cos^2(\theta)$$

car $\cos(\theta) \geqslant 0$ puisque $\theta \in [-\pi/2,\pi/2]$. Il vient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

*Remarque : cette intégrale peut s'interpréter comme l'aire d'un demi-disque de rayon 1, d'où la valeur de* $\frac{\pi}{2}$.