INTERRO DE COURS – NUMÉRO 12

Exercice 1 – Compléter le tableau des primitives usuelles ci-dessous :

Fonctions	Primitives	Fonctions	Primitives
A (constante)	$Ax+C$		
x^α $(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$u'u^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C$
En particulier si $\alpha=-2$, $\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u}+C$
En particulier si $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+C$
e^x	e^x+C	$u'\,\mathrm{e}^u$	e^u+C
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	$u'\cos(u)$	$\sin(u)+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+C$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$u'\,\mathrm{ch}(u)$	$\mathrm{sh}(u)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$u'\,\mathrm{sh}(u)$	$\mathrm{ch}(u)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos(u)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)+C$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)+C$

Exercice 2 – Déterminer une primitive des fonctions suivantes (on ne se posera pas la question des intervalles de définition) :

1. $f_1(x)=x^2-5x+6$

Solution : Une primitive est donnée par $F_1 : x\longmapsto \dfrac{x^3}{3}-5\dfrac{x^2}{2}+6x$

2. $f_2(x)=x^2\,\mathrm{e}^{x^3}$

Solution : Une primitive est donnée par $F_2 : x\longmapsto \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3}$

3. $f_3(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Solution : Une primitive est donnée par $F_3 : x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$

4. $f_4(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$

Solution : Une primitive est donnée par $F_4 : x \longmapsto \arctan(x^2)$

5. $f_5(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

Solution : Une primitive est donnée par $F_5 : x \longmapsto 2\arctan(x)$

6. $f_6(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^{\sin(x)}$

Solution : Une primitive est donnée par $F_6 : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$

7. $f_7(x) = \cos^4(x)$

Solution : Commençons par linéariser la fonction f_7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos^4(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{e}^{4ix}+\mathrm{e}^{-4ix}}{2} + 4\frac{\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{-2ix}}{2} + 3\right) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

Une primitive est alors donnée par $F_7 : x \longmapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$

8. $f_8(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$

Solution : Une primitive est donnée par $F_8 : x \longmapsto \arcsin(\mathrm{e}^x)$

9. $f_9(x) = \cos(2x) + \dfrac{1}{3}\sin(3x)$

Solution : Une primitive est donnée par $F_9 : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\sin(2x) - \dfrac{1}{9}\cos(3x)$

10. $f_{10}(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Solution : Une primitive est donnée par $F_{10} : x \longmapsto \ln|\ln(x)|$