INTERRO DE COURS – NUMÉRO 11

Exercice 1 – Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

$$u_n = n\cos(n) + n^2, \quad v_n = \sqrt{n^2+3n} - n.$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $-1 \leqslant \cos(n)$ donc, $-n \leqslant n\cos(n)$ donc $n^2 - n \leqslant u_n$. Or, $n^2 - n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1-\frac{1}{n}\right) = +\infty$. Ainsi, par théorème de minoration, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n = \sqrt{n^2+3n} - n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n} \\ &= \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 2 – On considère la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2n^2}{n^2+1}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.

   Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

   $$u_n - 2 = \frac{2n^2}{n^2+1} - \frac{2(n^2+1)}{n^2+1} = \frac{-2}{n^2+1} \leqslant 0$$

   Ainsi, la suite (u_n) est bien majorée par 2.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

   Solution : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement minorée par 0, donc elle est bien bornée.

Exercice 3 – On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

Solution : On a $u_0 = 1$; $u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 = 4$; $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 = 9$; $u_3 = u_2 + \times 2 + 3 = 16$.

2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 3 - u_n = 2n + 3 > 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant (n+1)^2$.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $u_n \geqslant (n+1)^2$ » .

Initialisation : $(n = 0)$
On a $u_0 = 1$ et $1 \geqslant 1 = (0+1)^2$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. On a alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \geqslant (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant (n+1)^2$$

4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2 = +\infty$ donc d'après la question précédente et d'après le théorème de minoration, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.