INTERRO DE COURS – NUMÉRO 10

Exercice 1 – Rappeler la formule du binôme de Newton.

Solution : Pour tous a et $b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Exercice 2 – Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ » .

Initialisation : $(n = 1)$

On a $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 3 – Calculer le produit suivant : $\prod_{k=1}^{n} 2k(k+1)$.

Solution : En utilisant les propriétés du produit, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n} 2k(k+1) = \prod_{k=1}^{n} 2 \times \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} (k+1) = 2^n \times n! \times \prod_{j=2}^{n+1} j = 2^n \times n! \times \frac{(n+1)!}{2} = 2^{n-1} \times n! \times (n+1)!$$

Exercice 4 –

1. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $k\,k! = (k+1)! - k!$.

Solution : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = (k+1-1)k! = k\,k!$$

2. En déduire la somme $\sum_{k=1}^{n} k\,k!$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente, on reconnait une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\,k! &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= \sum_{j=2}^{n} j! - \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$