DEVOIR SURVEILLÉ 6

Durée : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 5 pages, est constitué de 4 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (a) Vérifier que la suite (H_n) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   (c) Justifier que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
   On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 1.(b)
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n+1)$ et $v_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) Justifier que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
   (c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   En déduire qu'elles convergent vers une même limite notée γ.
3. *Une application* : on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = H_{2n} - H_n$.
   (b) Exprimer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n en fonction de termes de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et d'une constante.
   (c) En déduire que la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$.

Exercice 2 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. **Application à l'étude de deux suites**

   On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$a_{n+1} = 2a_n + 3^n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 3b_n + 3^n$$

   Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   (c) En déduire, en utilisant le résultat de la question **1** que l'on a :

   $$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}$$

3. **Application au calcul des puissances d'une autre matrice**

   On considère les matrices

   $$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner $P-1$.
   (b) Vérifier que $PMP^{-1} = A$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $M^n = P^{-1}A^nP$.
   En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

   $$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

4. **Application au calcul d'une somme**

   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, on a $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.
   (b) Pour tout entier naturel n, calculer $\sum_{k=0}^{n} 3^k$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1}$.
   (d) Déduire des questions précédentes et de **2.c)** que pour tout entier naturel n, on a :

   $$\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}$$

Exercice 3 – Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I : dans l'espace des quadruplets.
On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (1,-1,2,1), \quad v_2 = (2,1,0,1), \quad v_3 = (3,3,-2,1)$$

On pose également $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z-2t=0 \text{ et } x-z-t=0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel et en exhiber une base.
2. Montrer que G est un espace vectoriel et en exhiber une base.
3. Exhiber une base de $F \cap G$.

Partie II : dans l'espace des matrices.
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $E_k = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A^k M = A^{k-1}M\right\}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Dans cette question uniquement, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer l'ensemble E_1.
   (b) Déterminer l'ensemble E_2 et en exhiber une base.
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $E_k \subset E_{k+1}$.
4. Montrer que si A est inversible, alors $E_k = E_{k+1}$.

Partie III : dans l'espace des suites réelles.

1. *Question préliminaire* : On souhaite montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2-2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (a) **Méthode 1 :** Soit $q \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   En faisant apparaitre un télescopage, calculer $(1-q)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kq^k$, puis conclure.
   (b) **Méthode 2 :** Retrouver le résultat par récurrence.

Les suites a, b et c sont des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1$; $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $c_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$
F et G sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définis par :

$$F = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+3} = 8u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n\} \text{ et } G = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n\}$$

2. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui contient les suites a, b et c.
3. Vérifier que la famille (a,b,c) est une famille libre de F.
4. Le but de cette question est de montrer que la famille (a,b,c) est une base de F.
   (a) Soit $u \in F$. On considère la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n \quad (*)$.
      i. Vérifier que $v \in G$. En déduire que v est combinaison linéaire de b et c.
      ii. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de $u_0, v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}$. En déduire que u est combinaison linéaire des suites a, b et c. *Indication : on pourra utiliser la question préliminaire.*
   (b) Conclure.

Exercice 4 – Les deux parties de cet exercices sont indépendantes.

Partie 1 - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x\exp(-x^2) - 1 = 3x\,\mathrm{e}^{-x^2} - 1.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier rapidement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$ et tracer le tableau de variations de f.
4. Quel résultat du cours permet d'affirmer que f possède un développement limité en 0 à tout ordre ?
5. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
6. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ en 0 à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f. Étudier la position relative de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.
7. On donne $1/\sqrt{2} \approx 0{,}7$ ainsi que $f(1/\sqrt{2}) \approx 0{,}3$ et $f(-1/\sqrt{2}) \approx -2{,}3$. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans une base orthonormée directe d'unité 2cm.

Partie 2 - Étude de deux suites

On suppose désormais, dans toute cette partie, que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = 3x^n\exp(-x^2) - 1 = 3x^n\,\mathrm{e}^{-x^2} - 1.$$

11. Quels sont les signes de $f_n(0)$ et $f_n(1)$?
12. Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ (on dressera son tableau de variations en faisant bien apparaître la limite en $+\infty$).
13. Montrer que f_n s'annule exactement deux fois sur $[0;+\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n vérifiant $u_n < 1 < v_n$.
14. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$.
15. (a) Calculer $\mathrm{e}^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
    (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.
    (c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge. On note ℓ sa limite.
16. Soit g_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in \,]0;+\infty[, \quad g_n(x) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2.$$

    (a) Soit $t > 0$. Montrer que $g_n(t) = 0$ si, et seulement si, $f_n(t) = 0$.
    (b) On suppose que $\ell \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant la question précédente. Qu'en concluez-vous ?
    (c) Soit $(w_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par : $\forall n \geqslant 2$, $w_n = u_n - 1$.
        i. Quelle est la limite de $(w_n)_{n\geqslant 2}$?
        ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(1+w_n) = \dfrac{(1+w_n)^2 - \ln(3)}{n}$.
        iii. En déduire un équivalent de la suite $(w_n)_{n\geqslant 2}$.