CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 5

Exercice 1 – Partie I

1. Après calculs, $\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$
2. $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.}$
   D est bien diagonale, cela est rassurant.
3. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
   Initialisation : $PD^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n = A^0$.
   Donc P_0 est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que P_n est vraie. Alors
   $$A^{n+1} = AA^n = APD^nP^{-1}.$$
   Comme $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$. Donc
   $$A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDI_nD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$
   Ainsi P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$
4. $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$
   On en déduit grâce à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2-3^n & 3^n-1 \\ 2-2\times 3^n & 2\times 3^n - 1 \end{pmatrix}.}$$

Partie II

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$AX_n = \begin{pmatrix} -u_n + 2v_n \\ -4u_n + 5v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$
   Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.}$
6. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
7. En utilisant la partie I, on obtient que
   $$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} 2-3^n & 3^n-1 \\ 2-2\times 3^n & 2\times 3^n - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2-3^n)u_0 + (3^n-1)v_0 \\ (2-2\times 3^n)u_0 + (2\times 3^n-1)v_0 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 3^n(v_0-u_0) + 2u_0 - v_0 \\ 2\times 3^n(v_0-u_0) + 2u_0 - v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
   On a donc les termes généraux de u et v :
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^{n+1} - 2, \qquad v_n = 2\times 3^{n+1} - 2.}$
8. Par propriétés des suites géométriques, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.}$

Partie III

9. $\boxed{x_1 = 2x - y \text{ et } y_1 = -x + y.}$

   Comme x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $\boxed{x_1 \text{ et } y_1 \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R}.}$

10. On peut alors calculer les dérivées de x_1 et y_1 :

$$x_1' = 2x' - y', \qquad y_1' = -x' + y'.$$

   C'est à dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_1'(t) = P^{-1}X'(t)$. De plus, par définition du système linéaire vérifié par x et y, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$. D'où pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X_1'(t) &= P^{-1}AX(t) \\ &= P^{-1}PDP^{-1}X(t) \\ &= DP^{-1}X(t) \\ &= DX_1(t) \end{aligned}$$

   On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_1'(t) = DX_1(t)$.

11. Cela signifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{x_1'(t) = x_1(t), \qquad y_1'(t) = 3y_1(t).}$

12. Ainsi, il existe des réels λ et μ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $\boxed{x_1(t) = \lambda \mathrm{e}^{t}, \qquad y_1(t) = \mu \mathrm{e}^{3t}.}$

   Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $X_1(t) = P^{-1}X(t)$, on a aussi $X(t) = PX_1(t)$.

   Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = \lambda \mathrm{e}^{t} + \mu \mathrm{e}^{3t}$ et $y_1(t) = \lambda \mathrm{e}^{t} + 2\mu \mathrm{e}^{3t}$.

   A l'aide des conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 2 \\ \lambda + 2\mu &= 3 \end{cases}$$

   Cela implique que $\lambda = 1$ et $\mu = 1$. Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{3t}, \qquad y_1(t) = \mathrm{e}^{t} + 4\,\mathrm{e}^{3t}.}$$

Exercice 2 – Partie I : Quelques résultats généraux

1. Montrons par récurrence double le résultat. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant n$ ».

   Initialisation $u_1 = 1 \geqslant 1$, $u_2 = 2 \geqslant 2$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$, montrons la au rang $n+2$.

   Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+2} \geqslant n + 1 + n = 2n + 1$$

   Or $n \geqslant 1 \Longrightarrow 2n \geqslant n + 1 \Longrightarrow 2n + 1 \geqslant n + 2$ donc on a bien : $u_{n+2} \geqslant n + 2$, ce qui assure que la propriété est vraie au rang $n + 2$.

   Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant n.$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, le théorème de comparaison assure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2. Montrons par récurrence double le résultat. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ ».

Initialisation D'une part, on a : $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^0$. D'autre part, on a : $u_1 = 1$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{7}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^1$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$, montrons la au rang $n+2$.

Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ donc d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}.$$

Or

$$\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \left(1 + \frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{11}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{44}{16}$$

Donc

$$\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}.$$

Ainsi

$$\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}.$$

On a donc bien : $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^{n+2}$, ce qui assure que la propriété est vraie au rang $n+2$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{7}{4}\right)^n$

3. Montrons le résultat par récurrence simple. Posons pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} = u_{2n} - 1$ ».

Initialisation $\sum_{k=1}^{1} u_{2k-1} = u_1 = 1 = u_2 - 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la propriété vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} u_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} + u_{2(n+1)-1} \\ &= u_{2n} - 1 + u_{2n+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= u_{2n+2} - 1 \quad \text{d'après la définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} = u_{2n} - 1$.

4. Montrons le résultat par récurrence simple. Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$ ».

Initialisation $\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = 1 = u_2 - 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose la propriété vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} u_k &= \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1} \\ &= u_{n+2} - 1 + u_{n+1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= u_{n+3} - 1 \text{ d'après la définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n} \frac{u_p}{2^{p+1}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_p}{2^{p+2}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+2}-u_{p+1}}{2^{p+2}}$$

par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc :

$$\frac{s_n}{2} = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+2}}{2^{p+2}} - \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+1}}{2^{p+2}} = 2\sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+2}}{2^{p+3}} - \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{p+1}}{2^{p+2}}$$

Par changement d'indice dans chacune des sommes, on a donc :

$$\frac{s_n}{2} = 2\sum_{p=2}^{n+2} \frac{u_p}{2^{p+1}} - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{u_p}{2^{p+1}} = 2\left(s_{n+2} - \frac{u_0}{2^1} - \frac{u_1}{2^2}\right) - \left(s_{n+1} - \frac{u_0}{2^1}\right)$$

En conclusion, $\frac{s_n}{2} = 2s_{n+2} - \frac{3}{2} - s_{n+1} + \frac{1}{2} = 2s_{n+2} - s_{n+1} - 1$. Ainsi, $\boxed{\frac{s_n}{2} = 2s_{n+2} - s_{n+1} - 1}$.

Partie II : Lien avec les matrices

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

7. Montrons le résultat par récurrence. On note pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $X_n = A^n X_0$ ».

Initialisation Par convention $A^0 = I_2$ donc $A^0 X_0 = X_0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= A \times A^n X_0 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

8. (a)

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$

Ainsi, φ est $\boxed{\text{solution de l'équation } x^2 = x+1.}$

Remarque : on pouvait aussi résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ avec la méthode usuelle de résolution des équations du second degré.

(b) Deux méthodes sont possibles pour trouver une relation entre $\frac{1}{\varphi}$ et φ.

Méthode 1 :

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \varphi - 1$$

Méthode 2

On a $\varphi^2 = \varphi + 1$ donc en divisant par $\varphi > 0$ on a :

$$\varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

donc $\boxed{\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1}$.

On en déduit que :

$$\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 = (1-\varphi)^2 = 1 - 2\varphi + \varphi^2 = 1 - 2\varphi + \varphi + 1 = 2 - \varphi = 1 - \varphi + 1 = -\frac{1}{\varphi} + 1$$

Ainsi $-\dfrac{1}{\varphi}$ est aussi $\boxed{\text{racine de l'équation } x^2 = x + 1}$.

9. (a) P est une matrice 2×2, on calcule donc $ad - bc$ qui vaut $\overline{\varphi} - \varphi = -\sqrt{5} \neq 0$. Donc P est inversible d'inverse

$$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \overline{\varphi} & -1 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\overline{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\overline{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \overline{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \overline{\varphi} \\ -1 & \varphi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \overline{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 + \varphi - \varphi\overline{\varphi} & 1 + \overline{\varphi} - \overline{\varphi}^2 \\ -1 + \varphi^2 - \varphi & -1 + \varphi\overline{\varphi} - \overline{\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or φ et $\overline{\varphi}$ sont solutions de l'équation $x^2 = x + 1$ donc $-1 + \varphi^2 - \varphi = 1 + \overline{\varphi} - \overline{\varphi}^2 = 0$. De plus par définition de $\overline{\varphi}$ on a $\varphi\overline{\varphi} = -1$. Donc :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 + \varphi & 0 \\ 0 & -2 - \overline{\varphi} \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$\frac{2 + \varphi}{\sqrt{5}} = \frac{2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} + 5}{10} = \varphi$$

On vérifie de même que $\dfrac{-2 - \overline{\varphi}}{\sqrt{5}} = \overline{\varphi}$. Ainsi $\boxed{P^{-1}AP = D}$ où $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \overline{\varphi} \end{pmatrix}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation Par convention $A^0 = D^0 = I_2$ donc

$$PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0.$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times PD^nP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \quad \text{car } D = P^{-1}AP \text{ donc } A = PDP^{-1} \\ &= PDI_2D^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(d) La matrice D étant diagonale, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varphi & \overline{\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^n & 0\\ 0 & \overline{\varphi}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{\varphi} & 1\\ \varphi & -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varphi & \overline{\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{\varphi}\varphi^n & -\varphi^n\\ \varphi\overline{\varphi}^n & \overline{\varphi}^n\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \varphi & \overline{\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} & \varphi^n\\ -\overline{\varphi}^{n-1} & -\overline{\varphi}^n\end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \varphi\overline{\varphi} = -1\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1} & \varphi^n - \overline{\varphi}^n\\ \varphi^n - \overline{\varphi}^n & \varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 7 ,

$$\begin{aligned}
X_n &= A^nX_0\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1} & \varphi^n - \overline{\varphi}^n\\ \varphi^n - \overline{\varphi}^n & \varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1} & \varphi^n - \overline{\varphi}^n\\ \varphi^n - \overline{\varphi}^n & \varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En conservant uniquement la première ligne, on a donc :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1} - \overline{\varphi}^{n-1} + \varphi^n - \overline{\varphi}^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1}(1+\varphi) - \overline{\varphi}^{n-1}(1+\overline{\varphi})\right)$$

Or φ et $\overline{\varphi}$ sont solutions de $x^2 = 1 + x$ donc :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1}\varphi^2 - \overline{\varphi}^{n-1}\overline{\varphi}^2\right)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right)}$.

Partie III : Z-décomposition

11. On calcule les premières valeurs de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

12. (a) D'après la définition de la Z-décomposition, on ne peut avoir deux termes consécutifs de la suite (u_n) (c'est le sens de la contrainte : $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$, $c_i + 1 < c_{i+1}$). Donc $u_1 + u_2 + u_3$ n'est pas la Z-décomposition de 6. En revanche $u_1 + u_4$ convient puisque $1 \leqslant 1 < 4$.

(b) $5 = u_4$ est la Z-décomposition de 5 .

(c) $35 = 1 + 34 = u_1 + u_8$ est la Z-décomposition du nombre 35 car $1 \leqslant 1 < 8$.

(d) $130 = 89 + 34 + 5 + 2 = u_{10} + u_8 + u_4 + u_2$ est la Z-décomposition du nombre 130 car $1 \leqslant 2 < 4 < 8 < 10$.

13. (a) n est fixé et d'après la question 1, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc par définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$, il existe un entier naturel J non nul tel que : $\boxed{\forall i \geqslant J, \quad u_i \geqslant n+1}$.

(b) $u_1 = 1 \leqslant n$ car $n \in \mathbb{N}^*$, donc $1 \in A_n$.
De plus, d'après la question précédente : $\forall i \geqslant J$, $u_i \geqslant n+1$. Donc pour tout $i \geqslant J$, $i \notin A_n$.
Donc $A_n \subset [1, J-1]$, donc A_n $\boxed{\text{contient au plus } J-1 \text{ éléments}}$.

(c) $1 \in A_n$ donc $1 \leqslant \max(A_n)$, autrement dit $j \geqslant 1$.
De plus par définition d'un maximum, $j \in A_n$, donc par définition de A_n, $u_j \leqslant n$.
Enfin $j+1 \notin A_n$ car $j+1 > j = \max(A_n)$, donc, par définition de A_n, $n < u_{j+1}$.
On a donc bien montré les inégalités voulues.

(d) D'après la question précédente, $n < u_{j+1}$, donc $n - u_j < u_{j+1} - u_j$.
Or par définition de (u_n), $u_{j+1} - u_j = u_{j-1}$ donc on a bien : $\boxed{n - u_j < u_{j-1}}$.

Exercice 3 –

1. (a) On a : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^2 e^{-x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$. Donc,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

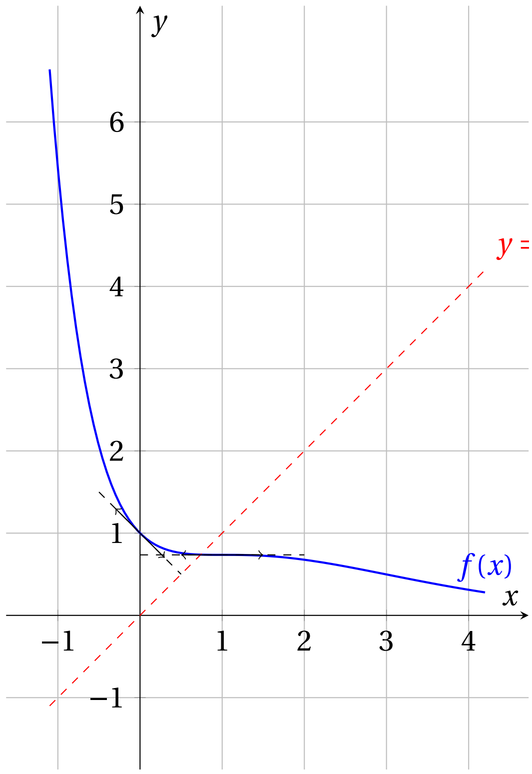
(b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale et fonction exponentielle). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x e^{-x} - (x^2+1) e^{-x} = (-x^2 + 2x - 1) e^{-x} = -(1-x)^2 e^{-x} \leqslant 0$$

Donc, f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	0

(c) On a $f'(0) = -(1-0)^2 e^0 = -1$ et $f'(1) = -(1-1)^2 e^{-1} = 0$. On a donc une tangente horizontale en 1 et une tangente de pente -1 en 0. On en déduit le graphe suivant :



2. (a) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = f'(x) - 1 < f'(x) \leqslant 0$$

Donc, h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), strictement décroissante. De plus,

$$h(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x^2 \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad h(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -x$$

De sorte que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.
Ainsi, d'après le théorème de la bijection, h est bijection de $\mathbb{R}$ vers
$h(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x); \lim\limits_{x\to-\infty} h(x)\right[= \mathbb{R}$.
Ainsi, 0 admet un unique antécédent, que l'on note α par la fonction h.
Autrement dit, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
Par ailleurs, $h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - 0,5 \simeq 0,8 - 0,5 = 0,3 > 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \simeq 0,8 - 1 = -0,2 < 0$.
Donc, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. (a) D'après l'étude faite à la question **1.(b)**, la fonction f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc

$$f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

Or, $f(1) \simeq 0,7 > 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,8 < 1$. Donc, $\left[f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
Ceci montre que $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \qquad f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

(b) Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. D'où $-1 \leqslant -x \leqslant -\frac{1}{2}$.
Par croissance de la fonction exponentielle, on a donc $0 < \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1/2} < 1$.
Par ailleurs, $0 \leqslant 1-x \leqslant \frac{1}{2}$, donc par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant (1-x)^2 \leqslant \frac{1}{4}$.
Ainsi, en multipliant les deux inégalité (de nombres positifs) obtenus, on a

$$0 \leqslant (1-x)^2 \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{4}$$

C'est-à-dire $\left|f'(x)\right| \frac{1}{4}$.
Appliquons désormais l'inégalité des accroissements finis. La fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ et $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{4}$ sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
L'inégalité des accroissements finis, appliquée à $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (d'après la question **2.(b)**) donne alors

$$|f(x) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|x-\alpha|$$

Or, $f(\alpha) = \alpha$ par définition de α donc, on a bien :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \qquad |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|x-\alpha|$$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ».

Initialisation : $(n = 0)$
On a $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi.
Alors, $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Or, on a montré à la question **3.(a)** que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a $f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
En particulier, $f(u_n) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, i.e $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ ».

Initialisation : $(n = 0)$
On a $|u_0 - \alpha| \leqslant 1 \times |u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^0 |u_0 - \alpha|$.
Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi.

D'après la question **4.(a)**, on a $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On peut donc appliquer le résultat de la question **3.(b)** à $x = u_n$. On a donc :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

C'est-à-dire

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

Or, par hypothèse de récurrence $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$. D'où,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Par ailleurs, $\frac{1}{4} \in]-1, 1[$, donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Donc, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$. Donc, (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 4 – Partie I :

1. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $P = c$ le polynôme constant égal à c. Alors, on a

$$P \text{ solution de } (E) \iff c = c \times c \iff c = 0 \quad \text{OU } c = 1$$

Conclusion, les polynômes constants solutions de (E) sont

$$P = 1 \text{ OU } P = 0$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $P = aX + b$. On suppose P de degré 1 i.e. $a \neq 0$. On a alors les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} P \text{ solution de } (E) &\iff a\left(X^2 - 1\right) + b = (a(X-1) + b)(a(X+1) + b) \\ &\iff aX^2 + b - a = (aX + b - a)(aX + b + a) \\ &\iff aX^2 + b - a = a^2X^2 + \left(ab + a^2 + ab - a^2\right)X + (b-a)(b+a) \\ &\iff aX^2 + b - a = a^2X^2 + 2abX + \left(b^2 - a^2\right). \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient

$$\begin{aligned} P \text{ solution de (E)} &\iff \begin{cases} a = a^2 \\ 0 = 2ab \\ b - a = (b-a)(b+a) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ -1 = -1 \end{cases} \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\iff P = X \end{aligned}$$

Conclusion, l'unique polynôme de degré 1 solution de (E) est $P = X$.

3. On suppose pour toute la suite P non constant. On note $d = \deg(P)$.
   Alors, par le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.
   Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$$

4. On procède par récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $P(u_n) = 0$ ».

   Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = a$ et par hypothèse a est une racine de P. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ i.e. que u_n est une racine de P. Montrons alors que u_{n+1} est aussi une racine de P. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$. Alors on a
   $$P(u_{n+1}) = P\left(u_n^2 + 2u_n\right) = P\left((u_n+1)^2 - 1\right)$$
   Donc en évaluant (E) en $X = u_n + 1$, on obtient que
   $$P(u_{n+1}) = P(u_n + 1 - 1)\,P(u_n + 1 + 1) = P(u_n)\,P(u_n + 2).$$
   Donc par hypothèse de récurrence,
   $$P(u_{n+1}) = 0_{\mathbb{C}} \times P(u_n + 2) = 0_{\mathbb{C}}$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie, à savoir
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est une racine de } P$$

Partie II :

5. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$. »

   Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 + 1 = a + 1$ et $(a+1)^{2^0} = (a+1)^1 = a+1$. Donc $u_0 + 1 = (a+1)^{2^0}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ i.e. $u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Par construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a
   $$u_{n+1} + 1 = u_n^2 + 2u_n + 1 = (u_n + 1)^2$$
   Donc par hypothèse de récurrence,
   $$u_{n+1} + 1 = \left((a+1)^{2^n}\right)^2 = (a+1)^{2^n \times 2} = (a+1)^{2^{n+1}}$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion. Par le principe de récurrence, on a démontré que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$$

6. Par la question précédente, on observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$r_n = |u_n + 1| = |a+1|^{2^n}$$
   Posons $q = |a+1|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = |a+1|$. De plus,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = q^{2^n} = v_{2^n}$$
   La fonction $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \end{array} 2^n$ est strictement croissante et est donc une extractrice.
   Conclusion, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = |a+1|$.

7. On a
   - Si $|a+1|>1$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et donc il en va de même de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Si $|a+1|=1$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et il en va de même de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Si $|a+1|\in]0;1[$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et donc il en va de même de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Si $|a+1|=0$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 et il en va de même de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cependant ce cas n'est possible que si $a+1=0$ i.e. $a=-1$ ce qui est exclu car $a\notin\mathbb{R}$ par hypothèse.
8. Nous venons de mentionner que $|a+1|>0$. Supposons que $|a+1|\neq 1$. Alors d'après la question précédente, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}=(|u_n+1|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone et donc prend une infinité de valeurs. Donc $(u_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ admet également une infinité de valeurs et de même pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est une racine de P, donc dans ce cas P admet une infinité de racines et donc $P=0$ ce qui contredit notre hypothèse de prendre P non constant. Conclusion,
$$\boxed{|a+1|=1}$$
9. On démontre de même que $|a-1|=1$, ce que l'on admet. Puisque $1=|a+1|=|a-(-1)|$, on en déduit que a est sur le cercle de centre -1 et de rayon 1 . De même $|a-1|=1$ implique que a est sur le cercle de centre 1 de rayon 1 . Or par un dessin, on s'aperçoit que l'unique point d'intersection de ces deux cercles est 0 . Donc $a=0$ ce qui contredit le fait que $a\notin\mathbb{R}$. Conclusion,
$$\boxed{P \text{ n'admet aucune racine non réelle.}}$$

Partie III

10. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x+2>0\Leftrightarrow x>-1$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $f(-1)=1-2=-1$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$		
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On observe alors que l'ensemble image de f est $f(\mathbb{R})=[-1;+\infty[$. En particulier,
$$u_1=f(u_0)\in[-1;+\infty[.$$

11. On suppose $u_1\in\mathbb{R}_+^*$.
    (a) On note par la question précédente, la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et le théorème de la bijection, on note que $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=\mathbb{R}_+^*$. Donc $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f et $u_1\in\mathbb{R}_+^*$. Par suite, on montre par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in\mathbb{R}_+^*$. Alors, on observe que
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n^2+2u_n=u_n^2+u_n+u_n>0+u_n=u_n$$
    Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

(b) Puisque la suite est strictement croissante, on en déduit que pour tout $(p,q) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$, $p < q$, on a $u_p < u_q$ et donc $u_p \neq u_q$. Ainsi, l'ensemble

$$\left\{u_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ est infini.}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P. On en déduit donc que P admet une infinité de racines. Conclusion,

$$\boxed{P = 0 \text{ ce qui contredit le fait que } P \text{ n'est pas constant.}}$$

12. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x + 2 - 1 = 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$. Or $g(-1/2) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 2$. On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
f	$+\infty$ $\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$ $+\infty$

(b) Par la question **10** et le théorème de la bijection, on observe que $f(]-1;0[) =]-1;0[$. Donc $]-1;0[$ est stable par f. De plus, $u_1 \in]-1;0[$ et donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]-1;0[$. Donc par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(u_n) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(u_n) < u_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} < u_n$$

Donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante.}}$$

De plus elle est minorée par -1 donc par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

On note ℓ sa limite. Par la stricte décroissance de la suite, $\forall n \geqslant 2, u_n < u_1$. Donc par passage à la limite, $\ell \leqslant u_1$. Or $u_1 < 0$ donc $\ell < 0$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a$f(u_n) = u_{n+1}$ donc par passage à la limite et continuité de la fonction f, on a

$$f(\ell) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad f(\ell) - \ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(\ell) = 0$$

Donc par ce qui précède $\ell = -1$ ou $\ell = 0$. Or $\ell < 0$ donc $\ell = -1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers -1 .}}$$

(c) Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement monotone, on en déduit qu'elle prend une infinité de valeurs différentes et donc P admet une infinité de racines. Conclusion,

$$\boxed{P = 0 \text{ ce qui contredit le fait que } P \text{ n'est pas constant.}}$$

13. Supposons que -1 soit une racine de P. Alors, pour $X=-2$, on a par (E),

$$P(4-1)=P(-2-1)P(-2+1) \quad \Leftrightarrow \quad P(3)=P(-3)P(-1)=0$$

Dans ce cas, 3 est aussi une racine. En posant $u_0=3$, on trouve alors $u_1=9+6=15\in\mathbb{R}_+^*$, ce qui est impossible d'après la question 11. Conclusion,

$$\boxed{\text{-1 n'est pas une racine de } P}$$

Or on a vu que u_1 est forcément une racine de P. Donc $u_1\neq -1$. Par les questions précédentes, nous savions déjà que $u_1\in[-1;+\infty[$ mais que les cas $u_1>0$ et $u_1\in]-1;0[$ sont impossibles. Conclusion,

$$u_1=0$$

14. Par la question précédente, on a

$$f(a)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2+2a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0 \text{ OU } a=-2$$

Cependant si $a=-2$, alors en prenant $X=-3$, on a

$$P(8)=P\left((-3)^2-1\right)=P(-3-1)P(-3+1)=P(-4)\times 0=0.$$

Donc 8 est une racine de P. Cependant si $u_0=8$, alors $u_1=64+16>0$ ce qui est impossible. Donc $a\neq -2$. Conclusion,

$$\boxed{\text{L'unique racine de } P \text{ est } a=0}$$

15. Puisque 0 est l'unique racine possible de P dans $\mathbb{C}$, on en déduit qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$, tel que $P=X^n$.
Synthèse. Vérifions si ce polynôme fonctionne. Si $P=X^n$, alors on a

$$P\left(X^2-1\right)=\left(X^2-1\right)^n=((X-1)(X+1))^n=(X-1)^n(X+1)^n=P(X-1)P(X+1),$$

et (E) est vérifiée. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S}=\left\{0_{\mathbb{C}[X]}\right\}\cup\left\{X^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}$$