DEVOIR SURVEILLÉ 5

Durée : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 5 pages, est constitué de 4 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – Dans cet exercice, les parties II et III sont indépendantes. Cependant, certains résultats obtenus à la partie I sont nécessaires pour traiter certaines questions des parties II et III.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie I

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Expliciter D.
3. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Donner sans démonstration la valeur de D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire les valeurs des coefficients de A^n.

Partie II

On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n. \end{cases}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_{n+1} à l'aide de A et X_n.
6. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de X_n en fonction de A, X_0 et n.
7. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
8. Étudier les limites de u et v.

Partie III

On considère deux fonctions x et y à valeurs réelles définies dérivables sur $\mathbb{R}$.
On suppose que x et y vérifient le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & -x & + & 2y \\ y' & = & -4x & + & 5y \end{array}\right.$$

et les conditions initiales $x(0) = 2$ et $y(0) = 3$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

On définit les deux fonctions x_1 et y_1 sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$ et l'on pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$.

9. Exprimer x_1 et y_1 en fonction de x et y et en déduire que x_1 et y_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X_1'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix}$.
10. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X_1'(t) = DX_1(t)$.
11. En déduire deux équations différentielles vérifiées par x_1 et y_1.
12. Déterminer les fonctions x_1 et y_1 et en déduire les expressions de x et y.

Exercice 2 –
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Dans tout cet exercice il n'est pas nécessaire d'utiliser les résultats vus en cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Partie I : Quelques résultats généraux

1. Montrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Montrer par récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.
3. Montrer par récurrence simple que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} = u_{2n} - 1$.
4. Montrer par récurrence simple que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$.
5. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{u_p}{2^{p+1}}$.
   En remarquant que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = u_{p+2} - u_{p+1}$, montrer sans récurrence que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{s_n}{2} = 2s_{n+2} - s_{n+1} - 1.$$

Partie II : Lien avec les matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

6. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $AX_n = X_{n+1}$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
8. On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (a) Vérifier que φ est racine de l'équation $x^2 = x+1$.
   (b) Exprimer $\dfrac{1}{\varphi}$ en fonction de φ et vérifier que $-\dfrac{1}{\varphi}$ est aussi racine de l'équation $x^2 = x+1$.
   On notera dorénavant $\overline{\varphi} = -\dfrac{1}{\varphi}$.
9. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \overline{\varphi} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \overline{\varphi} \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (d) En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de φ et $\overline{\varphi}$.
10. En déduire la formule dite « formule de Binet » : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right)$

Partie III : Z-décomposition

Dans cette partie on considère toujours la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en début d'exercice.

On s'intéresse au théorème suivant (que l'on admet).

Théorème : Pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique entier k et un unique k-uplet d'entiers $(c_1, \dots, c_k)$, vérifiant :

$$c_1 \geqslant 1 \quad \textit{et pour tout} \quad i \in [\![1, k-1]\!], \quad c_i + 1 < c_{i+1}, \quad \textit{tels que} \quad n = \sum_{i=1}^{k} u_{c_i}.$$

Cette décomposition s'appelle la Z-décomposition du nombre n.

Par exemple, $n = 4$ se décompose en : $4 = 1+3 = u_1 + u_3$. Donc $k = 2$ et $(c_1, c_2) = (1, 3)$.

Par ailleurs, $n = 17$ se décompose en : $17 = 1+3+13 = u_1 + u_3 + u_6$. Donc $k = 3$ et $(c_1, c_2, c_3) = (1, 3, 6)$

11. Calculer les premiers termes de la suite jusqu'à u_{10}.
    On vérifiera en particulier que $u_{10} = 89$.
12. (a) En remarquant que $6 = 1+2+3 = u_1 + u_2 + u_3$ et que $6 = 1+5 = u_1 + u_4$, donner la Z-décomposition de 6 et justifier votre choix.
    (b) Donner la Z-décomposition du nombre 5.
    (c) Donner la Z-décomposition du nombre 35 .
    (d) Donner la Z-décomposition du nombre 130.
13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Justifier l'existence d'un entier naturel J non nul tel que : $\forall i \geqslant J, u_i \geqslant n+1$.
    Notons $A_n = \left\{ i \in \mathbb{N}^*, u_i \leqslant n \right\}$.

(b) Montrer que $1 \in A_n$ et que A_n contient au plus $J-1$ éléments.
Soit alors $j = \max(A_n)$, c'est-à-dire que j est le plus grand entier appartenant à A_n.

(c) Montrer que $j \geqslant 1$ et que $u_j \leqslant n < u_{j+1}$.

(d) Démontrer que $n - u_j < u_{j-1}$.

Exercice 3 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Pour tout x réel, montrer que $f'(x) = -(1-x)^2\mathrm{e}^{-x}$.
   Dresser le tableau des variations de f.
   (c) Calculer $f'(0), f'(1)$ puis utiliser ces valeurs pour tracer dans un repère orthonormé d'unité 5 cm la courbe représentative de f. Faire figurer aussi la droite d'équation $y = x$.
   On utilisera également les valeurs approchées : $f(1) \approx 0,7$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,8$.
   On considère maintenant la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$.
2. (a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Établir que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution, notée α.
   Montrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f(x)$ appartient à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
   (b) Montrer que pour tout réel x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{4}$.
   En déduire que pour tout réel x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|x-\alpha|$.

   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. (a) Montrer grâce à la question 3/a/ que pour tout entier naturel n,
$$u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$
   (b) Montrer par récurrence et grâce à la question 3/b/ que pour tout entier naturel n,
$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$
   En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
   (c) Construire sur le graphique établi en **1/d/** les abscisses u_0, u_1, u_2.

Exercice 4 – On considère l'équation (E) : $\quad P\left(X^2-1\right) = P(X-1)P(X+1)$, d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$.

Partie I :

1. Déterminer les polynômes constants solutions de (E).
2. Déterminer les polynômes de degré 1 solutions de (E).
3. On suppose pour toute la suite P non constant. On note $d = \deg(P)$. Quel théorème assure alors l'existence d'une racine de P dans $\mathbb{C}$?

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P.

Partie II :
On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = |u_n + 1|$.

1. Montrer que $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Discuter suivant les valeurs de $|a+1|$ la monotonie de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire que $|a+1| = 1$.
4. On démontre de même que $|a-1| = 1$, ce que l'on admet. A l'aide d'un schéma, en déduire une contradiction.

Partie III :
On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$ et on définit :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 2x \end{array}$$

5. Préciser le tableau de variation de f puis justifier que $u_1 \in [-1; +\infty[$.
6. On suppose $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   (b) En déduire une contradiction à propos de P.
7. On suppose que $u_1 \in]-1; 0[$.
   (a) Déterminer le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ de :

   $$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{array}$$

   (b) En déduire la stricte monotonie, la convergence puis la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   (c) Retrouver la contradiction sur P.
8. Montrer que -1 n'est pas une racine de P. Que vaut u_1 ?
9. En déduire que l'unique racine réelle de P est 0 .
10. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).