# CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 4

**Exercice 1 –**

1. (a) Les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant a $\mathcal{E}$ vérifient en particulier que $ad - bc = 0$ donc d'après le cours, elles ne sont pas inversibles.

   (b) • Posons $a = 1, b = 1, c = -1$ et $d = -1$. Alors $a + d = 1 - 1 = 0$ et

   $$ad - bc = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 + 1 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

   • Posons $a = 1, b = -1, c = 1$ et $d = -1$. Alors $a + d = 1 - 1 = 0$ et

   $$ad - bc = 1 \times (-1) - (-1) \times 1 = -1 + 1 = 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$$

   (c) • Posons $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

   $$\text{Alors } ad - bc = 2 \times (-2) - 0 \times 0 = -4 \neq 0 \text{ donc } S \notin \mathcal{E}$$

   • Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

   $$\text{Alors } a + d = 2 + 2 = 4 \neq 0 \text{ donc } P \notin \mathcal{E}$$

   On constate donc que la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartiennent pas nécessaire

   (d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$. Alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$.
   Or $M \in \mathcal{E}$ donc en particulier, on a $a + d = 0$ donc :

   $$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

   De plus, $M \in \mathcal{E}$ donc en particulier, on a $ad - bc = 0$ donc $ad = bc$ donc :

   $$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a + d) = a \times 0 = 0$$

   et

   $$bc + d^2 = ad + d^2 = d(a + d) = d \times 0 = 0$$

   Finalement, on a justifié que si $M \in \mathcal{E}$, alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.
   Par suite, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2$.
   En conclusion, pour $n \geqslant 2$, $\boxed{M^n = 0_2}$.

2. (a) $1 \times 5 - (-2) \times 2 = 5 + 4 = 9 \neq 0$ donc la matrice $A$ est $\boxed{\text{inversible}}$.

   (b) Calculons $K$ :

   $$K = A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

   On a alors en posant $a = -2$, $b = 2$, $c = -2$ et $d = 2$, $a + d = -2 + 2 = 0$ et $ad - bc = -2 \times 2 - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$ donc $\boxed{K \in \mathcal{E}}$.

(c) Montrons ce résultat pa récurrence. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$.

**Initialisation** ($n = 0$) On a d'une part $A^0 = I$ et $3^0 I + 0 \times 3^{-1}K = I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est initialisée.

**Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (3^n I + n3^{n-1}K)A \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 3^n A + n3^{n-1}KA \\ &= 3^n(K+3I) + n3^{n-1}K(K+3I) \quad \text{car par définition de } K,\ A = K+3I \\ &= 3^n K + 3^{n+1}I + n3^{n-1}K^2 + n3^n K \\ &= 3^n K + 3^{n+1}I + n3^n K \quad \text{car } K^2 = 0 \text{ puisque } K \in \mathcal{E} \\ &= 3^{n+1}I + (n+1)3^n K \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion** D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après ce qui précède, $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + n3^{n-1}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2n \times 3^{n-1} & 2n \times 3^{n-1} \\ -2n \times 3^{n-1} & 3^n + 2n \times 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

3. (a) D'après la question 2.(b), on sait que $K \in \mathcal{E}$ donc d'après la question 1.(d), on a $K^2 = 0_2$ i.e. $(A-3I)^2 = 0_2$.
En développant, on obtient que $A^2 - 6A + 9I = 0_2$ donc $\alpha = -6$ et $\beta = 9$ conviennent.
Il reste à justifier l'unicité de $\alpha$ et $\beta$.
Soit donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0_2$ et soit $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha' A + \beta' I = 0_2$. Par soustraction, on obtient l'égalité :

$$\left(a - \alpha'\right)A + \left(\beta - \beta'\right)I = 0_2$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha \neq \alpha'$. Alors on aurait $\left(\alpha - \alpha'\right)A = \left(\beta' - \beta\right)I$ et puisque $\alpha - \alpha' \neq 0$, on aurait l'égalité $A = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'}I$, donc $A$ serait diagonale, ce qui est absurde. Donc $\alpha = \alpha'$ Par suite, $\left(\beta - \beta'\right)I = 0_2$, ce qui impose $\beta - \beta' = 0$ i.e. $\beta = \beta'$.
En conclusion, $(\alpha, \beta) = (-6, 9)$ est $\boxed{\text{l'unique couple de réels tels que } A^2 + \alpha A + \beta I = 0_2}$.

(b) D'après la question précedente, $A^2 - 6A + 9I = 0$ donc $-A^2 + 6A = 9I$ et par suite $A(-A + 6I) = 9I$ donc $A\left[\dfrac{1}{9}(-A+6I)\right] = I$ i.e. $A\left[3I - \dfrac{1}{6}A\right] = I$ ce qui suffit à prouver que la matrice $A$ est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A$$

(c) $K = A - 3I$ donc $A = K + 3I$ donc d'après la question précédente

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}A \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}(K+3I) \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{3}{9}I \\ &= \frac{2}{3}I - \frac{1}{9}K - \frac{1}{3}I \end{aligned}$$

Par conséquent :
$$A^{-1} = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$$
Pour $n = -1$, on a donc :
$$3^n I + n3^{n-1}K = 3^{-1}I + (-1)\times 3^{-2}K = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}K = A^{-1}$$
donc la formule $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$ reste valide pour $n = -1$.
Montrons qu'elle reste également valide pour tout $p \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. Tout élément $p \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ s'écrit $p = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$.
Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$ ».

**Initialisation** $(n-1)$ :
Nous venons de constater que $A^{-1} = 3^{-1}I - 3^{-2}K$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

**Hérédité** Soit $n$ un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$ et on sait que $K^2 = 0_2$ donc :
$$\begin{aligned}
A^{-(n+1)} &= A^{-n-1}\\
&= A^{-n} \times A^{-1}\\
&= \left(3^{-n}I - n3^{-n-1}K\right)\left(3^{-1}I - 3^{-2}K\right)\\
&= 3^{-n-1}I - 3^{-n-2}K - n3^{-n-2}K + n3^{-n-3}K^2\\
&= 3^{-n-1}I - (n+1)3^{-n-2}K\\
&= 3^{-(n+1)}I - (n+1)3^{-(n+1)-1}K
\end{aligned}$$
donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.

**Conclusion** D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n$ dans $\mathrm{N}^*$, à savoir
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{-n} = 3^{-n}I - n3^{-n-1}K$$
En conclusion, la formule $A^n = 3^n I + n3^{n-1}K$ est valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 2 –**

1. On a :
   - On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.}$
   - On sait que par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par passage à l'inverse $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
   - On sait que $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.}$
   - On sait que $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.}$
2. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, les fonctions $x \to x$ et $x \to \ln(x)$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$. De plus, $\ln(x) \neq 0$ donc la fonction $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}$.
   La fonction $f$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$. On a : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Ainsi
   $$f'(x) = \frac{1\times\ln(x) - x\times\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2}.$$
   Or $\ln(x)^2 > 0$ pour $x \in \mathcal{D}$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - 1$.

3. (a) Etudions le signe de $\ln(x)-1$. On a pour $x \in \mathcal{D}$ :

$$\ln(x)-1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^1.$$

On a alors le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | ‖ $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $\mathrm{e}$ | ↗ | $+\infty$ |

On a $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e})} = \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \mathrm{e}$.

(b) D'après ce qui précède, la fonction $f$ est strictement croissante de $[\mathrm{e};+\infty[$ dans $[\mathrm{e};+\infty[$. De plus, la fonction $f$ étant dérivable sur $\mathcal{D}$, elle est en particulier continue sur $[\mathrm{e};+\infty[$. Ainsi d'après le théorème de la bijection, $f$ réalise une bijection de $[\mathrm{e};+\infty[$ dans $[\mathrm{e};+\infty[$.

4. (a) Soit $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \iff \frac{1}{\ln(x)} = 1 \quad \text{car } x \neq 0$$

Ainsi :

$$f(x) = x \iff \ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}.$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{\mathrm{e}\}$.

(b)

$$f(x) - x \geqslant 0 \iff \frac{x}{\ln(x)} - x \geqslant 0 \iff \frac{x(1-\ln(x))}{\ln(x)} \geqslant 0$$

Dressons alors le tableau de signes de ce quotient :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $1-\ln(x)$ | ‖ | | $+$ | | $0$ | $-$ | |
| Signe de $\ln(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | | $+$ | | |
| Signe de $\dfrac{x(1-\ln(x))}{\ln(x)}$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

5. (a) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \mathrm{e}$ ».

**Initialisation** $(n=0)$ $u_0 = 3 > \mathrm{e}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

**Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant \mathrm{e}$. Or on a montré que $f$ est strictement croissante sur $[\mathrm{e};+\infty[$ donc on a :

$$f(u_n) \geqslant f(\mathrm{e}).$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$. On obtient donc

$$u_{n+1} \geqslant \mathrm{e}.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

**Conclusion** La propriété étant initialisée et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$. On a pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Or $f(x) - x \leqslant 0$ pour $x \geqslant \mathrm{e}$ et on vient de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \mathrm{e}$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante.

(c) D'après les questions précédentes, la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par e donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite $\ell$ qui vérifie $\ell \geqslant \mathrm{e}$.
Montrons que $\ell = \mathrm{e}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. De plus, la fonction $f$ est continue sur $\mathcal{D}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. La limite $\ell$ vérifie donc :

$$\ell = f(\ell).$$

Or on a montré à la question 4.(a) que l'équation $f(x) = x$ admettait une unique solution égale à e. Ainsi $\boxed{\ell = \mathrm{e}}$.

6. (a) D'après la question 2., on a pour $x \in \mathcal{D}$ :

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

Calculons le terme $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2$ et montrons qu'il est égal à $f'(x)$. On a pour $x \in [\mathrm{e}; +\infty[$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{\ln(x) - 2}{\ln(x)}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\ln(x)^2 - (\ln(x) - 2)^2}{\ln(x)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\ln(x)^2 - \ln(x)^2 + 4\ln(x) - 4}{\ln(x)^2}\right) \quad = \frac{1}{4}\left(\frac{4(\ln(x) - 1)}{\ln(x)^2}\right) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} = f'(x).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2}$.

(b) Pour $x \in [\mathrm{e}; +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc

$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

Or $-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leqslant 0$ donc

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4} \quad \text{pour } x \in [\mathrm{e}; +\infty[.$$

7. On démontre ici ce qui était admis dans l'énoncé. La preuve s'appuie sur l'inégalité des accroissements finis vue dans le Chapitre 13.
La fonction $f$ est continue et dérivable sur $[\mathrm{e};+\infty[$ et on a pour tout $x \in [\mathrm{e};+\infty[$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que $u_n \in [\mathrm{e};+\infty[$. Ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :
$$|f(u_n) - f(\mathrm{e})| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|,$$
or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, on a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|.$$

(a) Montrons le résultat par récurrence.
Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$ ».

**Initialisation** ($n = 0$) $u_0 = 3$ donc $|u_0 - \mathrm{e}| = 3 - \mathrm{e} \simeq 0.3$ et $\frac{1}{4^0} = 1$ ainsi $|u_0 - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^0}$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

**Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
D'après la question précédente, on a :
$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|$$
Or $|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$ par hypothèse de récurrence donc :
$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}$$
ainsi :
$$|u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^{n+1}}.$$
La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

**Conclusion** La propriété étant initialisée et héréditaire, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, à savoir :
$$|u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}.$$

(b) Remarquons que $\frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $\frac{1}{4} \in ]-1;1[$, on a :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$$
Or on a :
$$0 \leqslant |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4^n}$$
Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on a :
$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \mathrm{e}| = 0.$$
Ce qui nous permet de conclure que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}}$.

**Exercice 3 –**
**Partie I**

1. On a :
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$
Et donc, pour tout $k \geqslant 2, N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

2. (a) On a :
$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$$
$$QP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$$
(b) On a :
$$\begin{aligned} Q\Delta P &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$
(c) On a $Q\Delta P = D$. En multipliant à gauche par $P$, on obtient $PQ\Delta P = PD$. Or, $PQ = I_3$ donc on a $I_3\Delta P = PD$ soit $\Delta P = PD$. On multiplie maintenant à droite par $Q$, cela donne $\triangle PQ = PDQ$. Or, $PQ = I_3$ donc $\Delta I_3 = PDQ$ donc $\Delta = PDQ$.

(d) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $\Delta^n = PD^nQ$ »

**Initialisation** ( $n = 0$ ) :
$$\Delta^0 = I_3 \text{ et } PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3 \text{ donc } \mathcal{P}_0 \text{ est vraie.}$$
**Hérédité** : Soit $n$ un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a :
$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} &= \Delta^n \times \Delta \\ &= PD^nQ \times PDQ \\ &= PD^nI_3DQ \\ &= PD^{n+1}Q \end{aligned}$$
donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

**Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, à savoir :
$$\Delta^n = PD^nQ$$
(e) Puisque $D$ est diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or, d'après la question précédente,

$\Delta^n = PD^nQ$. Donc,

$$\begin{aligned}\Delta^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. (a) On a :

$$\Delta N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a bien $\Delta N = N\Delta$.

(b) On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}$ ».

**Initialisation** ( $n = 1$ ) On a $A^1 = A$ et $\Delta^1 + 1N\Delta^{1-1} = \Delta + N = A$ car $\Delta^0 = I_3$ par convention. Ainsi

$$A^1 = \Delta^1 + 1N\Delta^{1-1}$$

et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

**Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \big(\Delta^n + nN\Delta^{n-1} \times A \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \big(\Delta^n + nN\Delta^{n-1} \times (\Delta + N) \\ &= \Delta^{n+1} + \Delta^n N + nN\Delta^n + nN\Delta^{n-1}N \\ &= \Delta^{n+1} + N\Delta^n + nN\Delta^n + nN^2\Delta^{n-1} \quad \text{car } \Delta N = N\Delta \\ &= \Delta^{n+1} + N\Delta^n + nN\Delta^n \quad \text{car } N^2 = 0_3 \\ &= \Delta^{n+1} + (n+1)N\Delta^n. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion** La propriété étant initialisée et héréditaire, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}$$

(c) On a donc :

$$
\begin{aligned}
A^n &= \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n-1 & 2^{n-1}-1 \\ -2^n+2 & -2^{n-1}+2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

**Partie II**

1. On a :

$$AU_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + y_n - z_n \\ -2x_n + 2z_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

2. Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $U_n = A^n U_0$ »

**Initialisation** $(n = 0)$ :

$A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité** : Soit $n$ un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On sait que $U_{n+1} = AU_n$ d'après la question précédente, et que $U_n = A^n U_0$ par hypothèse de récurrence. Dès lors,

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

**Conclusion** : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$U_n = A^n U_0$$

3. On a donc :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= U_n = A^n U_0 \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1+2^n-1-n \\ -2^{n+1}+2+-2^n+2+2n \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n+1}+2^n-2-n \\ -2^{n+1}-2^n+4+2n \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n(2+1)-2-n \\ -2^n(2+1)+4+2n \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\times 2^n-2-n \\ -3\times 2^n+4+2n \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Partie III**

1. (a) Pour tout $n$, on a $z_{n+1} = z_n$ donc $(z_n)$ est constante. Ainsi, pour tout $n, z_n = z_0 = 1$.
   (b) On a donc $x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1$ et $y_{n+1} = -2x_n + 2$.
2. Calculons $r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$ :

$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 - 2x_n + 2 = x_n + y_n + 1 = r_n + 1$$

Ainsi, la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 1.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n + y_n = r_n = r_0 + n = x_0 + y_0 + n = 2 + n$$

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= 2x_{n+1} + y_{n+1} \\
&= 2\big(3x_n + y_n - 1\big) - 2x_n + 2 \\
&= 4x_n + 2y_n \\
&= 2\big(2x_n + y_n\big) \\
&= 2s_n
\end{aligned}$$

Donc, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 .

   (b) Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2x_n + y_n = s_n = s_0 \times 2^n = \big(2x_0 + y_0\big) \times 2^n = 3 \times 2^n$$

4. On remarque que :

$$s_n - r_n = 2x_n + y_n - x_n - y_n = x_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = s_n - r_n = 3 \times 2^n - 2 - n$$

De même, on remarque que :

$$2r_n - s_n = 2\left(x_n + y_n\right) - 2x_n - y_n = 2x_n + 2y_n - 2x_n - y_n = y_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_n = 2r_n - s_n = 2(2+n) - 3 \times 2^n = -3 \times 2^n + 4 + 2n$$

On retrouve donc bien les résultats de la **partie II.**

**Exercice 4 –**

1. (a) Soit $x \in [0;1]$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant 1 &\iff 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \quad \text{par croissance de } x \mapsto x^2 \\ &\iff -1 \leqslant -x^2 \leqslant 0 \\ &\iff e^{-1} \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^0 \quad \text{par croissance de } x \mapsto e^x \end{aligned}$$

Or, $e^{-1} > 0$ et $e^0 = 1$. D'où, pour tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1\,.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, $x^n \geqslant 0$ et donc,

$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad 0 \leqslant x^n e^{-x^2} \leqslant x^n\,.$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x^2} \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x\,.$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x^2} \mathrm{d}x = I_n$ et $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}\,.$$

(c) On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'où, d'après la question précédente, et par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0\,.$$

2. (a) La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ comme composée de fonctions dérivables sur $[0;1]$, et :

$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad f'(x) = -2xe^{-x^2}\,.$$

(b) D'après la question précédente, une primitive de la fonction définie sur $[0;1]$ par $x \mapsto xe^{-x^2}$ est donnée par $x \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$. Ainsi,

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\,.$$

3. (a) Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & xe^{-x^2} & & u(x) & = & -\frac{1}{2}e^{-x^2} \\ v(x) & = & x^{n+1} & & v'(x) & = & (n+1)x^n \end{array}$$

Alors, en utilisant la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 u'(x)\,v(x)\mathrm{d}x \\ &= [u(x)\,v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)\,v'(x)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\times x^{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{2}e^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2e} + \frac{n+1}{2}I_n \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$nI_n = \frac{1}{e} + 2I_{n+2} - I_n\,.$$

Or, d'après la question 1.(c), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On a donc également, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2} = 0$. Et donc,

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{e}\,.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} = \frac{I_{2(n+1)+1}}{(n+1)!} = \frac{I_{2n+3}}{(n+1)!}\,.$$

Or, d'après la question 3.(a) et puisque $2n+3 = (2n+1)+2$, on a :

$$I_{2n+3} = \frac{(2n+1)+1}{2}I_{2n+1} - \frac{1}{2e}\,,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} I_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2}I_{2n+1} - \frac{1}{2e} \\ &= (n+1)\,I_{2n+1} - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(n+1)\,I_{2n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{2e}\times\frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{I_{2n+1}}{n!} - \frac{1}{2e}\times\frac{1}{(n+1)!} \\ &= u_n - \frac{1}{2e}\times\frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ ».

**Initialisation** ($n=0$) : $u_0 = \frac{I_1}{0!} = I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$ d'après la question 2.(b). Par ailleurs, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\sum\limits_{k=0}^{0}\frac{1}{k!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$. Donc, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n$ un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après ce qui précède, on a :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!}.$$

D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{2e} \times \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, et ainsi, la proposition est héréditaire.
**Conclusion :** D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(b) Par définition de $u_n$, on a $I_{2n+1} = n! u_n$. D'après l'expression de $u_n$ obtenue à la question précédente, on en déduit :

$$I_{2n+1} = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{2e} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

(c) Soit $k \geqslant 1$ un entier. En utilisant le résultat de la question précédente dans le cas $n = k-1$, on obtient (en prenant bien garde de changer le nom de la variable muette à l'intérieur de la somme) :

$$I_{2k-1} = \frac{(k-1)!}{2} - \frac{(k-1)!}{2e} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!}.$$

Et donc,

$$\begin{aligned} kI_{2k-1} &= \frac{k(k-1)!}{2} - \frac{k(k-1)!}{2e} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \\ &= \frac{k!}{2} - \frac{k!}{2e} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} kI_{2k-1} - \frac{1}{2e} &= \frac{k!}{2} - \frac{k!}{2e} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} - \frac{1}{2e} \\ &= \frac{k!}{2} - \frac{k!}{2e} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} + \frac{1}{k!} \right) \\ &= \frac{k!}{2} - \frac{k!}{2e} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \\ &= I_{2k+1} \end{aligned}$$

Le script suivant convient :

```
import numpy as np
def calculI(n):
    I=1/2-1/(2*np.exp(1))
    for k in range(n):
        I=(k-1)/2*I-1/(2*np.exp(1))
    return I
```

**Exercice 5 –** **Partie I**

1. La fonction $f$ étant dérivable et ne s'annulant pas sur $I$ car strictement positive, la fonction $\varphi$, inverse de $f$, est dérivable sur $I$, et elle est évidemment également strictement positive.
2. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I,\ f'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I,\ \left(\frac{1}{\varphi}\right)'(t) + \frac{a(t)}{\varphi(t)} + \frac{b(t)}{\varphi^2(t)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I,\ -\frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t)} + \frac{a(t)}{\varphi(t)} + \frac{b(t)}{\varphi^2(t)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall t \in I,\ \varphi'(t) - a(t)\varphi(t) = b(t) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ est solution de } z' - a(t)z = b(t) \text{ sur } I. \end{aligned}$$

## Partie II

3. L'équation homogène associée à $(E_1)$ est :

$$(E_0) \quad z' - \frac{2t}{1+t^2}z = 0.$$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^2}$ étant donnée par $t \mapsto \ln(1+t^2)$, l'ensemble des solutions réelles de $(E_0)$ est :

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda(1+t^2),\ \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche maintenant une solution particulière de $(E)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose :

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{f(t)}{1+t^2}. \end{array}$$

D'après la méthode de variation de la constante, $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \lambda'(t) = \frac{(1+t^2)\cos t}{1+t^2} = \cos t.$$

Ainsi, la fonction $\lambda : t \mapsto \sin t$ convient, et donc la fonction $f : t \mapsto (1+t^2)\sin t$ est une solution de $(E_1)$. Finalement, l'ensemble des solutions réelles de $(E_1)$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{t \in \mathbb{R} \longmapsto (\lambda + \sin t)(1+t^2),\ \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

4. Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, la solution $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto (\lambda + \sin t)(1+t^2)$ de $(E_1)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \lambda + \sin t > 0,$$

ce qui est équivalent à $\lambda > 1$. Ainsi, l'ensemble des solutions strictement positives de $(E_1)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S}_{>0} = \left\{t \in \mathbb{R} \longmapsto (\lambda + \sin t)(1+t^2),\ \ \lambda > 1\right\}.$$

5. D'après la question 2., une fonction $\varphi$ est dans l'ensemble $\mathcal{S}_{>0}$ si et seulement si la fonction $f = \dfrac{1}{\varphi}$ est une solution strictement positive de $(E_2)$. Ainsi, l'ensemble des solutions strictement positives de $(E_2)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$\mathcal{S}'_{>0} = \left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{(\lambda + \sin t)(1+t^2)},\ \ \lambda > 1 \right\}.$$