DEVOIR SURVEILLÉ 4

Durée : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 5 pages, est constitué de 5 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – Soit a, b, c et d des réels et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 qui vérifient les deux conditions : $a + d = 0$ et $ad - bc = 0$

1. (a) Les matrices de $\mathcal{E}$ sont-elles inversibles ?
   (b) Vérifier que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{E}$.
   (c) En déduire que la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{E}$.
   (d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$.
   Déterminer la matrice M^2 et en déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice M^n.
   Dans toute la suite de l'exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ *et on note* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice identité d'ordre 2.*

2. (a) Justifier l'inversibilité de la matrice A
   (b) On pose : $K = A - 3I$. Vérifier que la matrice K appartient à $\mathcal{E}$
   (c) On rappelle que si B est une matrice carrée d'ordre 2, on pose par convention
   $$B^0 = I$$
      i. Exprimer, pour tout entier naturel n, la matrice A^n en fonction de n I et K
      ii. Donner l'expression de A^n sous forme d'un tableau matriciel.
3. (a) Établir l'existence d'un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera, pour lequel $A^2 + \alpha A + \beta I$ est la matrice nulle.
   (b) Retrouver le fait que la matrice A est inversible et montrer que :
   $$A^{-1} = \frac{2}{3} I - \frac{1}{9} A$$

(c) En déduire que :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}I - \frac{1}{9}K$$

et vérifier que la formule trouvée à la question 2/ c/ i/ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est encore valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 2 – On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D} =]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $\quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
2. Pour $x \in \mathcal{D}$, calculer $f'(x)$ puis justifier que $f'(x)$ est du même signe que $\ln(x) - 1$.
3. (a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$ en le complétant par les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que f réalise une bijection de $[\mathrm{e};+\infty[$ sur $[\mathrm{e};+\infty[$.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x, pour $x \in \mathcal{D}$.
   (b) Donner le signe de $f(x) - x$ lorsque $x \in \mathcal{D}$.
5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \mathrm{e}$.
   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.
6. (a) Montrer que $\quad \forall x \in [\mathrm{e};+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2}{\ln(x)}\right)^2$.
   (b) En déduire que $\quad \forall x \in [\mathrm{e};+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
7. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-\dfrac{1}{4}(u_n - \mathrm{e}) \leqslant \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{4}(u_n - \mathrm{e})$. En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \mathrm{e}| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \mathrm{e}|$$

   (b) Montrer alors, par récurrence, que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   (c) Retrouver ainsi la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers e.

Exercice 3 – **Partie I**

On considère les matrices :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose également : $A = \Delta + N$.

1. Calculer N^2 puis en déduire N^k pour tout entier $k \geqslant 2$.
2. (a) Calculer PQ et QP.
   (b) Vérifier que $Q\Delta P = D$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Montrer que $\Delta = PDQ$.

(d) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n = PD^nQ$.

(e) En déduire les neufs coefficients de la matrice Δ^n.

3. (a) Vérifier que : $\Delta N = N\Delta$.

(b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}.$$

(c) En déduire les neufs coefficients de la matrice A^n.

Partie II

Dans cete partie, nous allons étudier les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1\,, \quad y_0 = 1\,, \quad z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & 3x_n & + & y_n & - & z_n \\ y_{n+1} & = & -\;2x_n & & & + & 2z_n \\ z_{n+1} & = & & & & & z_n \end{array}\right.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ où A est la matrice définie dans la partie I.
2. Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$.
3. En utilisant la question **3.(c)** de la partie précédente, déterminer l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Partie III

Dans cette partie, on propose une autre méthode afin d'étudier les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie II.

1. (a) En utilisant la définition de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer directement la valeur de z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Exprimer alors x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n.

2. On introduit alors la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $r_n = x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.

   (a) Établir que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et préciser sa raison.

   (b) En déduire l'expression de $x_n + y_n$ en fonction de n.

3. On introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = 2x_n + y_n$ pour tout entier naturel n.

   (a) Prouver que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison.

   (b) En déduire l'expression de $2x_n + y_n$ en fonction de n.

4. En utilisant les questions **2** et **3**, retrouver les résultats de la question **3** de la partie II.

Exercice 4 – On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Établir pour tout $x \in [0;1]$, l'encadrement : $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \qquad f(x) = e^{-x^2}.$$

   (a) Pour tout $x \in [0;1]$, calculer $f'(x)$.

   (b) En déduire que $I_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e}$.

3. (a) En utilisant l'identité $x^{n+2}e^{-x^2} = x^{n+1} \times xe^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n - \dfrac{1}{2e}$.

   (b) Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \dfrac{I_{2n+1}}{n!}$.

   (a) Établir la relation $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{2e} \times \dfrac{1}{(n+1)!}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

   (b) Donner, sous forme de somme, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n.

   (c) Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$I_{2k+1} = kI_{2k-1} - \frac{1}{2e}$$

   À l'aide de cette relation et de la valeur de I_1, compléter le script Python suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur de I_{2n+1} pour une valeur de n donnée :

```
import numpy as np
def calculI(n):
    I=1/2-1/(2*np.exp(1))
    for k in range(n):
        I=.....
    return I
```

Exercice 5 – Le but de ce mini-problème est de proposer une méthode pour trouver toutes les solutions strictement positives des équations différentielles de Bernoulli d'ordre 2, c'est-à-dire de la forme

$$(E) \qquad y' + a(t)y + b(t)y^2 = 0$$

où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et où l'inconnue est une fonction y dérivable sur I. Dans la première partie, on montrera comment on peut se ramener à la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, et dans la deuxième, on traitera un exemple.

Partie I : Équation différentielle de Bernoulli d'ordre 2

Soit f une fonction définie sur I, dérivable et strictement positive. On associe à f la fonction φ définie sur I par : $\forall t \in I, \varphi(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

1. Justifier rapidement que φ est dérivable et strictement positive sur I.
2. Montrer que f est une solution de (E) sur I si, et seulement si, la fonction φ qui lui est associée est solution sur I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z :

$$z' - a(t)z = b(t).$$

Partie II : Un exemple

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad z' - \frac{2t}{1+t^2} z = (1+t^2)\cos(t).$$

4. En déduire toutes les solutions de (E_1) qui sont strictement positives sur $\mathbb{R}$.
5. En utilisant la question 2, déterminer toutes les solutions strictement positives de l'équation

$$(E_2) \qquad y' + \frac{2t}{1+t^2} y + (1+t^2)\cos(t) y^2 = 0.$$