CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 3

Exercice 1 –

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+3} - u_{n+2} \\ &= 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n - u_{n+2} \\ &= 3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_{n+1} + 2u_n \\ &= 3(u_{n+2} - u_{n+1}) - 2(u_{n+1} - u_n) \\ &= 3v_{n+1} - 2v_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

(b) L'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est $x^2 - 3x + 2 = 0$. Ses racines sont 1 et 2 . Ainsi il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda \times 2^n + \mu \times 1^n = \lambda \cdot 2^n + \mu.$$

Comme $v_0 = u_1 - u_0 = 0$ et $v_1 = u_2 - u_1 = 1$ alors on en déduit le système suivant

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

ce qui nous donne $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. On obtient donc bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n - 1$.

2. Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors (en reconnaissant une somme télescopique)

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_0 = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_0$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0 = u_n - u_0 + u_0 = u_n$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a donc

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^k - 1\right) + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 + 1 = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n + 1 = 2^n - n$$

Ainsi pour $n \geqslant 1$, $u_n = 2^n - n$. Or $u_0 = 1 = 2^0 - 0$ donc l'expression précédente est aussi valable pour $n = 0$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$.

Exercice 2 – Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$P(z) = z^3 - (6+i)z^2 + (-14+10i)z - 16(1+i).$$

1. Soit $z \in i\mathbb{R}$. Il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $z = iy$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff P(iy) = 0 \\ &\iff (iy)^3 - (6+i)(iy)^2 + (-14+10i)iy - 16(1+i) = 0 \\ &\iff -iy^3 + (6+i)y^2 + (-10-14i)y - 16(1+i) = 0 \\ &\iff \big(6y^2 - 10y - 16\big) + i\big(-y^3 + y^2 - 14y - 16\big) = 0 \end{aligned}$$

Or, $y \in \mathbb{R}$, donc $6y^2 - 10y - 16 \in \mathbb{R}$ et $-y^3 + y^2 - 14y - 16 \in \mathbb{R}$. Donc, par unicité de l'écriture algébrique :

$$P(iy) = 0 \iff \begin{cases} 6y^2 - 10y - 16 = 0 & (E_1) \\ -y^3 + y^2 - 14y - 16 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Commençons par résoudre (E_1) : $6y^2 - 10y - 16 = 0 \iff 3y^2 - 5y - 8 = 0$. Calculons le discriminant Δ de cette équation : $\Delta = 25 + 96 = 121 > 0$. L'équation admet donc deux solution réelles

$$y_1 = \frac{5+11}{6} = \frac{8}{3} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{5-11}{6} = -1$$

Regardons alors si y_1 et y_2 sont solutions de (E_2).

$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E_2) &\iff -(-1)^3 + (-1)^2 - 14(-1) - 16 = 0 \\ &\iff 1 + 1 + 14 - 16 = 0 \\ &\iff \text{VRAI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 \text{ est solution de } (E_2) &\iff -\left(\frac{8}{3}\right)^3 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 14 \times \frac{8}{3} - 16 = 0 \\ &\iff \frac{-512}{27} + \frac{64}{9} - \frac{112}{3} - 16 = 0 \\ &\iff \frac{-512 + 192 - 1008 - 432}{27} = 0 \\ &\iff \text{FAUX} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(iy) = 0 \iff y = -1 \iff z = -i$$

Conclusion, l'unique complexe imaginaire pur, solution de l'équation $P(z) = 0$ est $z = -i$.

2. Par la question précédente, $-i$ est une racine de P. Donc $z + i$ divise P.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c) &\iff P(z) = az^3 + (b + ia)z^2 + (c + ib)z + ic \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ -6 - i = b + ia \\ -14 + 10i = c + ib \\ 16 - 16i = ic \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 - 2i \\ c = -16 + 16i \end{cases} \end{aligned}$$

On a alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P(z) = (z+i)(z^2 - (6+2i)z - 16 + 16i)$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff (z+i)(z^2-(6+2i)z-16+16i) = 0 \\ &\iff z+i = 0 \qquad \text{OU} \qquad z^2-(6+2i)z-16+16i = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant Δ de $z^2-(6+2i)z-16+16i$. On a :

$$\Delta = (6+2i)^2 - 4(-16+16i) = 36+24i-4+64-64i = 96-40i$$

On cherche une racine carrée $\delta = a+ib$ de Δ. On a :

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta &\iff \begin{cases} a^2-b^2 = 96 \\ 2ab = -40 \\ a^2+b^2 = \sqrt{96^2+40^2} = \sqrt{10816} = 104 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 200 \\ 2ab = -40 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \pm 10 \\ b = \mp 2 \end{cases} \iff \delta = \pm(10-2i) \end{aligned}$$

On en déduit donc les deux racines de $z^2-(6+2i)z-16+16i = 0$:

$$z_1 = \frac{6+2i+10-2i}{2} = 8 \qquad \text{et} \qquad z = \frac{6+2i-10+2i}{2} = -2+2i$$

Donc, l'ensemble des solutions complexes de $P(z) = 0$ est donné par

$$\mathcal{S} = \{-i\ ;\ 8\ ;\ -2+2i\}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $Z = z^7$. Alors,

$$\begin{aligned} z^{21}-(6+i)z^{14}+(-14+10i)z^7-16(1+i) = 0 &\iff P(Z) = 0 \\ &\iff Z = -i \qquad \text{OU} \qquad Z = 8 \qquad \text{OU} \qquad Z = -2+2i \\ &\iff z^7 = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} \qquad \text{OU} \qquad z^7 = 8 \qquad \text{OU} \qquad z^7 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \\ &\iff \exists k \in [\![0;6]\!], \quad z = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{14}+\frac{2ik\pi}{7}} \qquad \text{OU} \qquad z = \sqrt[7]{8}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{7}} \qquad \text{OU} \qquad z = 2^{3/14}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{28}+\frac{2ik\pi}{7}} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{14}}\ ;\ k \in [\![0;6]\!]\right\} \cup \left\{2^{3/7}\,\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{7}}\ ;\ k \in [\![0;6]\!]\right\} \cup \left\{2^{3/14}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{28}+\frac{2ik\pi}{7}}\ ;\ k \in [\![0;6]\!]\right\}$$

Exercice 3 –

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ et $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ x^2+2x+1 \geqslant 0 \text{ et } x^2-2x+1 \geqslant 0.}$$

(b) Les fonctions $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ et arctan sont définies sur $\mathbb{R}$ et la fonction arcsin sur $[-1;1]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{le nombre } f(x) \text{ est bien défini} &\iff -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \\ &\iff -(1+x^2) \leqslant 2x \leqslant 1+x^2 \text{ (car } 1+x^2 > 0) \\ &\iff \left(x^2+2x+1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2-2x+1 \geqslant 0\right) \end{aligned}$$

donc, d'après la question 1.a,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. On a

$$f(0) = \arcsin(0) + 2\arctan(0) = 0 + 2 \times 0 = 0$$
$$f(1) = \arcsin(1) + 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$
$$f(-1) = \arcsin(-1) + 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = -\pi$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \lim_{u\to 0} \arcsin(u) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \lim_{u\to 0} \arcsin(u) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi$. Finalement,

$$\boxed{f(0) = 0,\ f(1) = \pi,\ f(-1) = -\pi,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi.}$$

3. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ et arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et la fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\dfrac{2x}{x^2+1} \in\ ]-1;1[$, alors f est dérivable en x. Or

$$\begin{aligned}
-1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1 &\iff -(1+x^2) < 2x < 1 + x^2\\
&\iff x^2+2x+1 > 0 \quad \text{et} \quad x^2-2x+1>0\\
&\iff (x+1)^2 > 0 \quad \text{et} \quad (x-1)^2 > 0\\
&\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \times \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(2x)^2}{(1+x^2)^2}}} \times \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2}{1+x^2}\\
&= \frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \times \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} \qquad \text{car } \sqrt{(1+x^2)^2} = |1+x^2| = 1+x^2\\
&= \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \times \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2}\\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{4}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1;1[\\ -\dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{2}{1+x^2} = 0 & \text{si } x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases}.
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\},\ f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{1+x^2} & \text{pour } x \in]-1;1[\\ 0 & \text{pour } x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases}.}$$

4. D'après la question précédente :

   ▷ Il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x) = 4\arctan(x) + c_1$. Pour $x = 0$ on obtient $0 = 0 + c_1$ donc $c_1 = 0$.

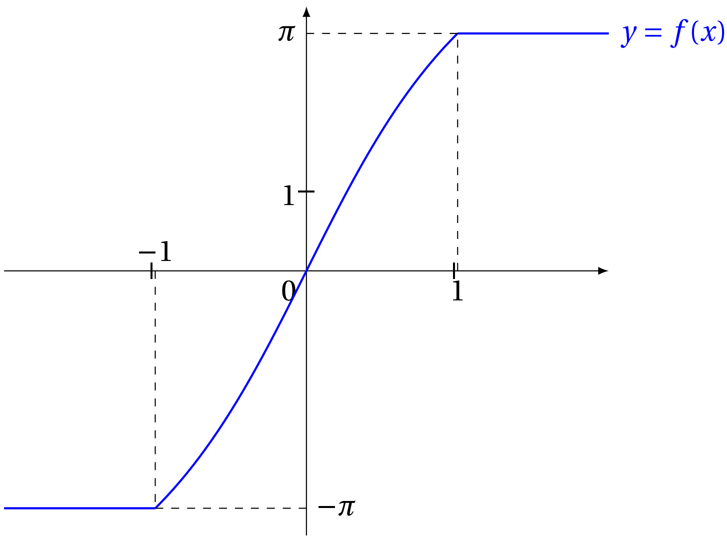
   ▷ Il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f(x) = c_2$. En prenant la limite lorsque x tend vers $+\infty$ dans les deux membres de l'égalité précédente, on obtient $\pi = c_2$.

   ▷ Il existe $c_3 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $f(x) = c_3$. En prenant la limite lorsque x tend vers $-\infty$ dans les deux membres de l'égalité précédente, on obtient $-\pi = c_3$.

   Finalement

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{pour } x \in]-\infty;-1] \\ 4\arctan(x) & \text{pour } x \in [-1;1] \\ \pi & \text{pour } x \in [1;+\infty[\end{cases}.}$$

   Voici la courbe :



Exercice 4 –

1. La fonction suivante convient :

```
import numpy as np
def calculu(n):
    u=1
    for k in range(n):
        u=np.log(1+u**2)
    return u
```

2. Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

   Initialisation $(n = 0)$:

   $u_0 = 1$ donc on a bien l'encadrement $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ et donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant u_n^2 \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 1 + u_n^2 \leqslant 2$ et par croissance de la fonction ln sur l'intervalle $[1;2]$, on obtient $\ln(1) \leqslant \ln(1+u_n^2) \leqslant \ln(2)$. Or, $\ln(1) = 0$ et $\ln(2) \simeq 0,7 \leqslant 1$ donc finalement $0 \leqslant \ln(1+u_n^2) \leqslant 1$ i.e $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

3. (a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ et pour tout x dans $[0;1]$:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = \frac{-(x^2-2x+1)}{1+x^2} = \frac{-(x-1)^2}{1+x^2} \leqslant 0$$

De plus, $f'(x)$ ne s'annule qu'en une seule valeur, à savoir pour $x = 1$. Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$. Sachant que $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2) - 1$, on obtient le tableau suivant :

x	0		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0
Variations de f	0	$\searrow$	$\ln(2) - 1$

Puisque la fonction f est (strictement) décroissante sur l'intervalle $[0;1]$ et que $f(0) = 0$, on en déduit que $f(x) \leqslant 0$ pour tout x dans $[0;1]$.

(b) Soit n dans $\mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \ln(1+u_n^2) - u_n = f(u_n)$$

Or, d'après la question **1**, on sait que $u_n \in [0;1]$ et d'après la question **2.a)**, on sait alors que $f(u_n) \leqslant 0$ i.e $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) D'après la question **1**, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et d'après la question **2.b)**, on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Le théorème de convergence monotone s'applique et permet de conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. (a) Pour tout réel $x \geqslant 0$, posons $h(x) = \ln(1+x) - x$.
La fonction h est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0$$

Par conséquent, la fonction h est décroissante sur $[0;+\infty[$. Puisque $h(0) = 0$, on en déduit que $h(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. Autrement dit, on a l'inégalité demandée $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

(b) Soit n dans $\mathbb{N}$. En appliquant ce qui précède à $x = u_n^2 \geqslant 0$, on obtient $\ln(1+u_n^2) \leqslant u_n^2$, i.e $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.

(c) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $u_n \leqslant (\ln(2))^n$ ».
Initialisation ($n = 1$) :
$u_0 = 1$ donc $u_1 = \ln(2)$ donc on a bien $u_1 \leqslant (\ln(2))^1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après la question **3.b)**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $u_n \leqslant$

$u_1 \leqslant \ln(2)$. Or, d'après la question **1**, elle est positive donc $0 \leqslant u_n \ln(2)$. De plus, par hypothŝe de récurrence, on sait que $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$ donc en multipliant membre à membre ces deux inégalités portant sur des nombres positifs, il vient $0 \leqslant u_n^2 \leqslant (\ln(2))^{n+1}$. Or d'après la question **3.b)**, on sait que $u_{n+1} \leqslant u_n^2$ donc finalement on obtient $u_{n+1} \leqslant (\ln(2))^{n+1}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leqslant \ln(2)^n.$$

(d) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. D'après les questions **1** et **3.c)**, on sait que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(2))^n = 0$ puisque $\ln(2) \in]-1;1[$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(e) Ce résultat signifie qu'à partir du rang $n = 6$, on a $u_n \leqslant 0.0001$. La convergence de (u_n) vers 0 est donc très rapide.

5. On sait d'après la question **4.(c)** que pour tout $k \geqslant 1$, $u_k \leqslant (\ln(2))^k$. Par ailleurs, $u_0 = 1 \leqslant (\ln(2))^0 = 1$. Bref, pour tout $k \geqslant 0$, $u_k \leqslant (\ln(2))^k$.
Dès lors, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(2))^k$$

Or, par formule de sommation d'une suite géométrique, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(2))^k = \frac{1-\ln(2)^n}{1-\ln(2)}$$

Ainsi, on a bien montré que

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1-(\ln(2))^n}{1-\ln(2)}$$

Exercice 5 – 1. **Deux premiers exemples -**

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\alpha = \frac{\alpha}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{\alpha}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Remarque : La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est constante.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$$

2. **Un troisième exemple -**

(a) On procède par récurrence.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}(n)$: « $\sum\limits_{k=1}^{2n} k(-1)^k = n$ ».

Initialisation : $\sum\limits_{k=1}^{2} k(-1)^k = -1+2 = 1$ donc $\mathcal{A}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{A}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k k &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k + (-1)^{2n+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2}(2n+2)\\ &= n-(2n+1)+(2n+2)\\ &= n+1\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{A}(n)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après la relation précédente :

$$v_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k = \frac{n}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2(2n+1).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\sum_{k=1}^{2n+1} k(-1)^k$. Or de la relation précédente, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n+1} k(-1)^k = \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k + (-1)^{2n+1}(2n+1) = n-(2n+1) = -n-1$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2n+1} = -\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = -\frac{1}{2(2n+1)}$$

(c) Ainsi les deux suites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers 0 .

(d) Comme les deux suites extraites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent toutes les deux vers la même limite (à savoir 0), la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente (et sa limite est 0).

3. **Un quatrième exemple -**

(a) Soit $x \in [0,1]$. Alors $e^x \geqslant e^0 = 1$ car la fonction exp est croissante. Et donc $0 \leqslant e^x - 1$.
Pour montrer la partie droite de l'encadrement, nous allons étudier la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], f(x) = e^x - 1 - e\cdot x$
La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et : $\forall x \in [0,1], f'(x) = e^x - e = e^x - e^1 \leqslant 0$ (car exp est croissante). Donc f est décroissante sur $[0,1]$ et donc, pour tout $x \in [0,1], f(x) \leqslant f(0) = 0$.
On a donc bien montré que : $\forall x \in [0,1], e^x - 1 \leqslant e\cdot x$.

(b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Alors $\frac{1}{k} \in [0,1]$ et donc, d'après la question précédente, $0 \leqslant e^{\frac{1}{k}} - 1 \leqslant e\cdot\frac{1}{k}$.
Ainsi, en multipliant par k (qui est bien positif), on obtient $0 \leqslant ke^{\frac{1}{k}} - k \leqslant e$. En sommant cet encadrement pour k de 1 à n, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(ke^{\frac{1}{k}} - k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} e \text{ i.e. } 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} ke^{\frac{1}{k}} - \sum_{k=1}^{n} k \leqslant ne$$

et ainsi

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} ke^{\frac{1}{k}} - \frac{n(n+1)}{2} \leqslant ne$$

En divisant par $n(n+1)$ qui est bien positif, on obtient bien

$$0 \leqslant v_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{e}{n+1}$$

(c) Comme $\dfrac{e}{n+1} \longrightarrow 0$, d'après la question précédente et le théorème d'encadrement,

$$v_n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ i.e. } \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

4. **Une situation plus générale**

(a) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}(n+2)v_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} ku_k \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} ku_k + (n+1)u_{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(n(n+1)v_n + (n+1)u_{n+1}\right) \\ &= nv_n + u_{n+1}\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $nv_{n+1} + 2v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$ i.e. $nv_{n+1} - nv_n = u_{n+1} - 2v_{n+1}$ et donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante : $\forall k \in [\![1,n]\!], u_k \geqslant u_n$; et donc

$$v_n \geqslant \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} ku_n = \frac{u_n}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{u_n}{2}$$

(e) D'après les questions 4.(c) et 4.(d) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. Ainsi la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
De plus, elle est minorée par 0 car la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive.
On en déduit que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, d'après le théorème de convergence monotone.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$v_{2n} = \frac{1}{2n(2n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} ku_k + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k\right) = \frac{1}{2n(2n+1)}\left(n(n+1)v_n + \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k\right)$$

Or, comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante : $\forall k \in [\![n+1,2n]\!], u_k \leqslant u_{n+1}$. Donc

$$v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot v_n + \frac{1}{2n(2n+1)}\sum_{k=n+1}^{2n} ku_{n+1}$$

Or

$$\sum_{k=n+1}^{2n} ku_{n+1} = u_{n+1}\sum_{k=1}^{n}(k+n) = u_{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n^2\right) = u_{n+1} \cdot \frac{n(3n+1)}{2}$$

Donc on obtient finalement

$$v_{2n} \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} \cdot u_{n+1}$$

(g) D'après la question 3.(d) et par conservation des inégalités par passage à la limite, on obtient

$$\ell' \geqslant \frac{\ell}{2}$$

De même d'après la question 3.(f) et par conservation des inégalités par passage à la limite, on obtient

$$\ell' \leqslant \frac{\ell'}{4} + \frac{3\ell}{8} \quad \text{i.e.} \quad \frac{3\ell'}{4} \leqslant \frac{3\ell}{8} \quad \text{i.e.} \quad \ell' \leqslant \frac{\ell}{2}$$

Ainsi $\ell' = \dfrac{\ell}{2}$.

Exercice 6 –

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(-x) &= \ln(1+e^{-x}) + \frac{x\,e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ &= \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) + \frac{x}{1+e^x} \\ &= \ln(1+e^x) - \ln(e^x) + \frac{x}{1+e^x} \\ &= \ln(1+e^x) - x + \frac{x}{1+e^x} \\ &= \ln(1+e^x) - \frac{x\,e^x}{1+e^x}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Comme } \forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x), \text{ on peut affirmer que } g \text{ est paire.}}$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0.}$

Puisque g est paire, on déduit de la limite précédente : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$

(b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x + x\,e^x}{1+e^x} + \frac{x\,e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{-x\,e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_{1/\lambda}(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}}\left(\ln(1+e^x) + \frac{1}{\lambda}\ln(1+e^{-x})\right) \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\frac{\lambda\ln(1+e^x) + \ln(1+e^{-x})}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\left(\ln(1+e^{-x}) + \lambda\ln\left(1+e^{-(-x)}\right)\right) \\ &= f_\lambda(-x). \end{aligned}$$

On a donc démontré : $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{1/\lambda}(x) = f_\lambda(-x).}$

(b) Lorsque $\lambda = 1$, on obtient que pour tout x réel, $f_1(x) = f_1(-x)$. Donc $\boxed{f_1 \text{ est paire}}$.

(c) La relation précédente assure que
$\boxed{\text{les courbes } \Gamma_\lambda \text{ et } \Gamma_{1/\lambda} \text{ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.}}$

3. (a) La fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_\lambda'(x) &= \frac{1}{1+\lambda}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \lambda\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\,\frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x}) - \lambda\,\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^x)} \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\,\frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x}) - \lambda(\mathrm{e}^{-x}+1)}{(1+\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^x)} \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\,\frac{\mathrm{e}^x-\lambda}{1+\mathrm{e}^x}. \end{aligned}$$

On a montré : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda'(x) = \frac{1}{1+\lambda}\,\frac{\mathrm{e}^x-\lambda}{1+\mathrm{e}^x}.}$

(b) On a

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \ln(1+\mathrm{e}^x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = +\infty.$$

Pour les limites de f, il y a trois cas :

- Cas $\lambda > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = +\infty$
- Cas $\lambda = 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = 0$
- Cas $\lambda \in]-1;0[$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = -\infty$

(c) Puisque λ est strictement supérieur à -1, on a $\lambda + 1 > 0$ donc le signe de f_λ' est celui de $x \mapsto \mathrm{e}^x - \lambda$.

Premier cas : $\lambda > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_\lambda'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - \lambda > 0 \iff \mathrm{e}^x > \lambda \iff x > \ln(\lambda)$$

car exp est strictement croissante. De même, $f_\lambda'(x) < 0 \iff x < \ln(\lambda)$.

x	$-\infty$		$\ln(\lambda)$		$+\infty$
$f_\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
f_λ	$+\infty$	$\searrow$	$f_\lambda(\ln(\lambda))$	$\nearrow$	$+\infty$

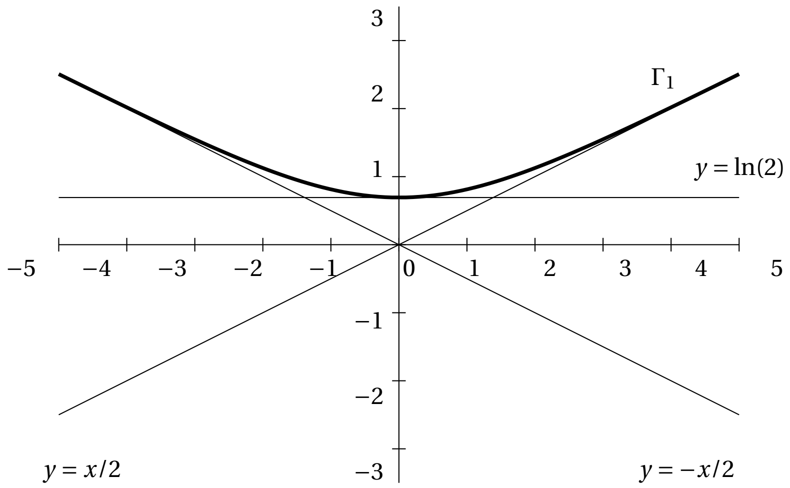
Deuxième cas : $\lambda = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	
f_0	0	$\nearrow$	$+\infty$

Troisième cas : $\lambda \in]-1;0[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	
f_0	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4.



5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Le point $M(\lambda)$ a pour coordonnées $\Big(\ln(\lambda), f_\lambda\big(\ln(\lambda)\big)\Big)$. Or

$$\begin{aligned} f_\lambda\big(\ln(\lambda)\big) &= \frac{1}{1+\lambda}\left(\ln(1+\lambda)+\lambda\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}\Big(\ln(1+\lambda)+\lambda\ln(1+\lambda)-\lambda\ln(\lambda)\Big) \\ &= \ln(1+\lambda)-\frac{\lambda}{1+\lambda}\ln(\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^{+*}, \text{ les coordonnées de } M_\lambda \text{ sont } \left(\ln(\lambda), \ln(1+\lambda)-\frac{\lambda}{1+\lambda}\ln(\lambda)\right).}$$

(b) Lorsque λ parcourt $\mathbb{R}^{+*}$, $\ln(\lambda)$ parcourt $\mathbb{R}$ tout entier. Et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \ln(\lambda) \iff \lambda = e^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ M_\lambda\left(\ln(\lambda), \ln(1+\lambda)-\frac{\lambda}{1+\lambda}\ln(\lambda)\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}^{+*}\right\} \\ &= \left\{ M_{e^x}\left(\ln(e^x), \ln(1+e^x)-\frac{e^x}{1+e^x}\ln(e^x)\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{ M_{e^x}\left(x, \ln(1+e^x)-\frac{x\,e^x}{1+e^x}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{ M_{e^x}\Big(x, g(x)\Big) \mid x \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\boxed{\mathcal{E} \text{ est la courbe représentative de la fonction } g.}$