DEVOIR SURVEILLÉ 3

Durée : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 4 pages, est constitué de 6 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait la relation récurrente linéaire d'ordre 2 suivante :
   $$v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n - 1$.
2. Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k + u_0$$
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2 – Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$P(z) = z^3 - (6+i)z^2 + (-14+10i)z - 16(1+i).$$

1. Déterminer l'ensemble des imaginaires purs $z \in i\mathbb{R}$ tels que $P(z) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z+i)\left(az^2 + bz + c\right)$$
3. En déduire l'ensemble des solutions complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $P(z) = 0$.
4. En déduire l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que
   $$z^{21} - (6+i)z^{14} + (-14+10i)z^7 - 16(1+i) = 0$$

Exercice 3 –

1. (a) Justifier rapidement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+1 \geqslant 0$ et $x^2-2x+1 \geqslant 0$.

   (b) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$de la fonction f dont l'expression est

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2\arctan(x).$$

2. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ et, si elles existent, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f.
3. Déterminer sur quelle partie A de $\mathcal{D}_f$ les théorèmes classiques de dérivabilité assurent que f est dérivable. Calculer la dérivée f' de f sur A.(On en donnera une expression la plus simple possible!).
4. En déduire une expression plus simple de f puis tracer la courbe de f.

Exercice 4 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n^2)$.

1. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle calcule et affiche u_n pour un entier n donné :

```
import numpy as np
def calculu(n):
    u=.....
    for k in range(n):
        u=.....
    return u
```

2. Établir pour tout entier n de $\mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$, à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = \ln(1+x^2) - x$$

   (a) Dresser le tableau de variation de f puis déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. (a) Justifier pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité : $\ln(1+x) \leqslant x$.

   (b) Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.

   (c) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité : $u_n \leqslant (\ln(2))^n$.

   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Établir pour tout entier $n \geqslant 2$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1-(\ln 2)^n}{1-\ln 2}$.

Exercice 5 – Pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels, on définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$$

1. **Deux premiers exemples.**
   (a) Soit un réel α. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite constante égale à α.
   Calculer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   (b) Dans cette question, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{1}{n}$. Calculer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. **Un troisième exemple.** Dans cette question, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k = n$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les expressions respectives de v_{2n} et v_{2n+1} en fonction de n.
   (c) Déterminer ensuite les limites respectives des suites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 0}$.
   (d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. **Un quatrième exemple.** On suppose dans cette question que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{1/n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1], 0 \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant \mathrm{e} \times x$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant k\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - k \leqslant \mathrm{e}$ puis montrer que,
   $$0 \leqslant v_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$
   (c) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et donner sa limite.
4. **Une situation plus générale.** Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et à valeurs positives.
   (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1}$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})$.
   (d) Montrer par ailleurs que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$v_n \geqslant \frac{u_n}{2}$$
   (e) En déduire alors que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puis justifier qu'elle converge. On note ℓ' sa limite.
   (f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$v_{2n} = \frac{n(n+1)v_n}{2n(2n+1)} + \frac{1}{2n(2n+1)} \sum_{k=n+1}^{2n} ku_k \leqslant \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} \cdot u_{n+1}$$
   (g) Conclure alors que $\ell' = \dfrac{\ell}{2}$.

Exercice 6 – Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on considère la fonction

$$f_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+\lambda}\Big(\ln(1+\mathrm{e}^x) + \lambda \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\Big) \end{array}$$

et on note Γ_λ sa courbe représentative dans le plan.

On considère également la fonction $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+\mathrm{e}^x) - \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}. \end{array}$

Il est facile de montrer que la fonction g et les fonctions f_λ, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que la fonction g est paire. Déterminer la limite de g en $-\infty$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g.
2. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, démontrer la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{1/\lambda}(x) = f_\lambda(-x)$.
   (b) Quelle propriété peut-on en déduire pour f_1 ?
   (c) Que pouvez-vous en déduire quant aux courbes Γ_λ et $\Gamma_{1/\lambda}$?
3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel strictement supérieur à -1.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_\lambda(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \lambda}{(1+\lambda)(1+\mathrm{e}^x)}$.
   (b) Déterminer, en fonction de la valeur de λ, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f_λ.
   (c) Dresser le tableau de variations de f_λ.
   On distinguera les cas $\lambda \in]-1;0[$, $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.
4. On admet que la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est une asymptote de Γ_1 en $+\infty$ et que Γ_1 est au-dessus de cette asymptote sur $[0, +\infty[$.
   Tracer Γ_1.
5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on note $M(\lambda)$ l'unique point de Γ_λ où la tangente à Γ_λ est horizontale. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous ces points M_λ lorsque λ parcourt $]0, +\infty[$.
   (a) Donner, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, les coordonnées du point $M(\lambda)$.
   (b) Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ est $y = g(x)$, autrement dit, que $\mathcal{E}$ est la courbe représentative de la fonction g.