CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 2

Exercice 1 –

1. Montrons par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$:
Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : «u_n existe et $u_n \geqslant 1$.»
   - Initialisation ($n = 0$) :
   $u_0 = 4$ donc u_0 existe et comme $4 \geqslant 1$, on a bien $u_0 \geqslant 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1$ donc $u_n + 1 \geqslant 2$ donc $u_n + 1 \neq 0$ donc $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ existe bien.
   D'autre part,
   $$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 2 - u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 1}.$$
   Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1$ donc $u_n - 1 \geqslant 0$. Or $3 \geqslant 0$ et $u_n + 1 \geqslant 2 > 0$ donc $\dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 1} \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - 1 \geqslant 0$ *i.e.* $u_{n+1} \geqslant 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :
   $$\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 1}$$

2. Montrons que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique :
$u_0 = 4$ donc $u_1 = \dfrac{4u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{14}{5}$ donc $u_2 = \dfrac{4u_1 - 2}{u_1 + 1} = \dfrac{4 \times \frac{14}{5} - 2}{\frac{14}{5} + 1} = \dfrac{46}{19}$.
   - $u_1 - u_0 = \dfrac{14}{5} - 4 = -\dfrac{6}{5}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{46}{19} - \dfrac{14}{5} = -\dfrac{36}{95}$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_2$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   - $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{14}{5}}{4} = \dfrac{7}{10}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{46}{19}}{\frac{14}{5}} = \dfrac{115}{133}$ donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

   Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est ni arithmétique, ni géométrique}}$

3. Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $u_n \neq 2$ ».
Initialisation ($n = 0$) :
$u_0 = 4$ et $4 \neq 2$, donc $u_0 \neq 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $u_{n+1} = 2$. Alors $\dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} = 2$ donc $4u_n - 2 = 2u_n + 2$ donc $2u_n = 4$ donc $u_n = 2$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $u_n \neq 2$: absurde! Donc $u_{n+1} \neq 2$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
Conclusion d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2}$$

4. (a) Justifions brièvement que la suite (w_n) est bien définie :
En effet, on vient de montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$, donc $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est bien définie}}$

(b) Montrons que la suite (w_n) est géométrique :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-2} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2} = \frac{4u_n-2-u_n-1}{4u_n-2-2u_n-2} = \frac{3u_n-3}{2u_n-4} = \frac{3(u_n-1)}{2(u_n-2)} = \frac{3}{2}w_n$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{3}{2} \text{ et de premier terme } w_0 = \frac{u_0-1}{u_0-2} = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}}$

(c) Exprimons w_n en fonction de n :

Par conséquent, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $w_n = w_0 \times q^n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}$

5. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n \neq 1$:
Soit n dans $\mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $w_n = 1$. Alors $\frac{u_n-1}{u_n-2} = 1$ donc $u_n - 1 = u_n - 2$ et donc $-1 = -2$: absurde ! Donc $w_n \neq 1$.
Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \neq 1}$

Exprimons u_n en fonction de w_n :
On sait que $w_n = \frac{u_n-1}{u_n-2}$ donc $w_n(u_n-2) = u_n - 1$ donc $w_n u_n - 2w_n = u_n - 1$ donc $w_n u_n - u_n = 2w_n - 1$ donc $(w_n - 1)u_n = 2w_n - 1$. Or, d'après la question précédente, on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \neq 1$ donc $w_n - 1 \neq 0$ donc on peut écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{2w_n-1}{w_n-1}}$$

6. Expression de u_n en fonction de n :
D'après **4)**, on sait que $w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ et d'après **5)**, on sait que $u_n = \frac{2w_n-1}{w_n-1}$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}}$$

Exercice 2 –

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \sin(3x) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = 3x + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - 3x + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

2. (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x+x) \\ &= \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)(2\cos^2(x) - 1) \\ &= \sin(x)(4\cos^2(x) - 1) \end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\sin(3x) - \sin(2x) &= \sin(x)(4\cos^2(x) - 1) - 2\sin(x)\cos(x) \\ &= \sin(x)(4\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1)\end{aligned}$$

Donc, si $\sin(3x) = \sin(2x)$, on a $\sin(x) = 0$ ou $4\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$. Posons $X = \cos(x)$. Le discriminant de $4X^2 - 2X - 1$ vaut 20, donc les racines de ce trinôme sont $\dfrac{2-\sqrt{20}}{8}$ et $\dfrac{2+\sqrt{20}}{8}$, c'est-à-dire $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\text{si } \sin(2x) = \sin(3x), \text{ alors } \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ ou } \cos(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

(d) D'après la question 1., pour $x = \dfrac{\pi}{5}$ on a $\sin(2x) = \sin(3x)$. Or $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ n'est pas nul puisque $\dfrac{\pi}{5} \in]0;\pi[$. Donc, avec la question 2.(c), on obtient $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ ou $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Comme $5 > 4$, on a $\sqrt{5} > 2$ puis $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$. Or $\dfrac{\pi}{5} \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) > 0$ puis $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

En raisonnant de même et en remarquant que $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) < 0$, on obtient $\boxed{\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}$.

Exercice 3 –

1. (a) D'après $(\star\star)$ utilisée avec $x = y = 0$, on obtient

$$f(0)f(0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0)^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0) = 0.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.D'après $(\star\star)$ utilisée avec $y = x$, on a

$$f(x)^2 = \sqrt{x}f(2x) + \sqrt{x}f(2x) = 2\sqrt{x}f(2x)$$

Et ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

(c) Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors d'après la question précédente

$$f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x) \quad \text{et} \quad f(y)^2 = 2\sqrt{y}f(2y)$$

ce qui nous donne, comme $\sqrt{x} \neq 0$ et $\sqrt{y} \neq 0$,

$$f(2x) = \frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad f(2y) = \frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}}$$

En réinjectant dans $(\star\star)$, on obtient

$$f(x)f(y) = \sqrt{y}\cdot\frac{f(x)^2}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cdot\frac{f(y)^2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(yf(x)^2 + xf(y)^2\right)$$

(d) Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Alors

$$\begin{aligned}(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y))^2 &= yf(x)^2 + xf(y)^2 - 2\sqrt{xy}f(x)f(y) \\ &= 2\sqrt{xy}\left(\frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(yf(x)^2 + xf(y)^2\right) - f(x)f(y)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

d'après la question précédente.

(e) Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. D'après la question 1.(d),

$$\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{y}f(x) = \sqrt{x}f(y)$$

Comme x et y sont strictement postifs, on peut diviser par $\sqrt{xy}$ cette dernière égalité, et l'on obtient

$$\frac{f(x)}{\sqrt{x}} = \frac{f(y)}{\sqrt{y}}$$

Ceci étant vrai pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, on en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(f) *Cette dernière question est plus difficile car c'est à vous de prendre quelques initiatives.*
Première étape : Comme la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \alpha$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}$$

Comme $f(0) = 0 = \alpha \cdot \sqrt{0}$, alors on peut finalement écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \alpha\sqrt{x}$$

Deuxième étape : Nous allons ensuite réinjecter ce résultat dans l'égalité $(\star\star)$. On obtient, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$

$$\alpha\sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{y} = \sqrt{y} \cdot \alpha\sqrt{2x} + \sqrt{x} \cdot \alpha\sqrt{2y}$$

i.e.

$$\alpha^2\sqrt{xy} = 2\alpha\sqrt{2xy}$$

Comme ceci est vrai pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, alors en particulier pour $x = y = 1$, cela donne

$$\alpha^2 = 2\alpha\sqrt{2} \quad \text{i.e.} \quad \alpha(\alpha - 2\sqrt{2}) = 0$$

Ainsi $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2\sqrt{2}$. Finalement f est donc bien la fonction nulle ou la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$.

2. La fonction nulle est bien sûr solution du problème. Posons $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$. Alors, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y) = \sqrt{y} \cdot 2\sqrt{4x} + \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{4y} = 4\sqrt{4xy} = 8\sqrt{xy} = 2\sqrt{2x} \cdot 2\sqrt{2y}$$

Donc f est bien solution du problème.
$\boxed{\text{Bilan}}$: ce problème admet donc exactement deux solutions, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$ et la fonction nulle.

Exercice 4 –

1. On a :

$$f(2) = \frac{1}{\overline{2+i}} = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - i\frac{1}{5}$$

$$f(1+i) = \frac{1}{\overline{1+i}+i} = \frac{1}{1-i+i} = \frac{1}{1} = 1$$

Soit maintenant $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a :

$$f(z) = 2 \iff \frac{1}{\overline{z}+i} = 2 \iff \overline{z} + i = \frac{1}{2}$$
$$\iff \overline{z} = \frac{1}{2} - i \iff z = \frac{1}{2} + i$$

Donc l'unique antécédent de 2 par f est $\dfrac{1}{2}+i$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(z)=1+i &\iff \frac{1}{\overline{z}+i}=1+i \iff \overline{z}+i=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2} \\ &\iff \overline{z}=\frac{1}{2}-i\frac{3}{2} \iff z=\frac{1}{2}+i\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc l'unique antécédent de $1+i$ par f est $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{3}{2}$.

2. (a) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. On a :

$$f(z)\in\mathbb{R} \iff f(z)=\overline{f(z)} \iff \frac{1}{\overline{z}+i}=\frac{1}{z-i} \iff \overline{z}+i=z-i \iff z-\overline{z}=2i \iff \mathrm{Im}(z)=1$$

Ainsi, l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z)\in\mathbb{R}$ correspond à la droite d'équation $y=1$.

(b) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$. On a :

$$f(z)\in\mathrm{i}\mathbb{R} \iff f(z)=-\overline{f(z)} \iff \frac{1}{\overline{z}+i}=\frac{-1}{z-i}\overline{z}+i=-z+i \iff z+\overline{z}=0 \iff \mathrm{Re}(z)=0$$

Ainsi, l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z)\in\mathbb{R}$ correspond à la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées), privé du point $(0;1)$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(z)\in\mathbb{U} &\iff \left|f(z)\right|=1 \\ &\iff \left|\frac{1}{\overline{z}+i}\right|=1 \iff \left|\overline{z}+i\right|=1 \\ &\iff |z-i|=1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z)\in\mathbb{U}$ correspond au cercle de centre le point d'affixe i (i.e de coordonnées $(0;1)$) et de rayon 1.

3. (a) D'après la question **2(b)** (puisque l'on a raisonné par équivalence), l'image par f de l'axe imaginaire pur est l'axe imaginaire pur.

(b) i. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \left|f(x)+\frac{i}{2}\right| &= \left|\frac{1}{\overline{x}+i}+\frac{i}{2}\right| = \left|\frac{1}{x+i}+\frac{i}{2}\right| = \left|\frac{x-i}{x^2+1}+\frac{i}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2x-2i+i(x^2+1)}{2(x^2+1)}\right| = \frac{\sqrt{4x^2+(x^2-1)^2}}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x^4+2x^2+1}}{2(x^2+1)} = \frac{\sqrt{(x^2+1)^2}}{2(x^2+1)} = \frac{(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ii. Soit $\theta\in[0,2\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$. On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}\right) &= \frac{1}{\frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}+i} = \frac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)+i(1-\sin(\theta)} \\ &= \frac{\big(1-\sin(\theta)\big)\big(\cos(\theta)-i(1-\sin(\theta)\big)}{\cos^2(\theta)+\big(1-\sin(\theta)\big)^2} \\ &= \frac{\big(1-\sin(\theta)\big)\big(\cos(\theta)-i(1-\sin(\theta)\big)}{2-2\sin(\theta)} \\ &= \frac{-i+\big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)}{2} = -\frac{i}{2}+\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2} \end{aligned}$$

iii. La question 3(b)i montre que si $x \in \mathbb{R}$, alors $f(x)$ appartient au cercle de centre $A\left(-\dfrac{i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, l'image par f de l'axe réel est incluse dans le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
La question 3(b)ii montrer que le point d'affixe $\dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}$ (qui est sur l'axe réel), appartient au cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, par double inclusion, l'image par f de l'axe réel est bien le cercle de centre $A\left(-\dfrac{i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

(c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On a :

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{e^{-i\theta}+i} = \frac{1}{\cos(\theta)+i(1-\sin(\theta))} = \frac{\cos(\theta)-i(1-\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)+(1-\sin(\theta))^2} = -\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}$$

Or,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1+\tan(\frac{\theta}{2})}{1-\tan(\frac{\theta}{2})} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})+\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})-\sin(\frac{\theta}{2})}\\ &= \frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})-\sin^2(\frac{\theta}{2})}{1-2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{\frac{1+\cos(\theta)}{2}-\frac{1-\cos(\theta)}{2}}{1-\sin(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}\end{aligned}$$

Donc, on a bien

$$f(e^{i\theta}) = -\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

Or, lorsque θ parcours $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$ parcours $\mathbb{R}$, donc $-\dfrac{i}{2}+\dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$ parcours la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$.

Bref, l'image par f du cercle trigonométrique est la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 – Partie A

1. L'équation du second degré $x^2+x+1=0$ a pour discriminant $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ donc elle n'admet pas de solution réelle. Autrement dit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $x^2+x+1 \neq 0$, ce qui justifie que la fonction f de l'énoncé soit définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit x dans $\mathbb{R}$ tel que $x \neq 0$. Alors :

$$f(x) = \frac{x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)} = \frac{1}{x\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right) = 1$.
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on obtient par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right) = +\infty$
et par inverse $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)} = 0$ i.e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
De même, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. En conclusion :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1 / et pour tout x dans $\mathbb{R}$, d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on a :

$$f'(x) = \frac{1\left(1+x+x^2\right) - x(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x+x^2\right)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{\left(1+x+x^2\right)^2}$$

Or, $\left(1+x+x^2\right)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)(1+x)$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

On remarque en effet que f est croissante sur l'intervalle $[-1,1]$.

4. (a) D'après le cours, l'équation cartésienne réduite de la tangente (T) à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

Or, $f'(0) = 1$ d'après la question 3 / et $f(0) = 0$ donc la tangente (T) admet pour équation $y = x$.

(b) Soit x dans $[-1,+\infty[$. Calculons $f(x)-x$ puis étudions son signe :

$$f(x) - x = \frac{x}{1+x+x^2} - x = \frac{x - x\left(1+x+x^2\right)}{1+x+x^2}$$

donc

$$f(x) - x = \frac{-x^2-x^3}{1+x+x^2} = \frac{-x^2(1+x)}{1+x+x^2}$$

On a $x \in [-1,+\infty[$ donc $x \geqslant -1$ donc $x+1 \geqslant 0$. De plus, $-x^2 \leqslant 0$ donc par produit, on obtient $-x^2(1+x) \leqslant 0$. Enfin, on a $x+1 \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$ donc par somme $1+x+x^2 \geqslant 0$ puis par quotient :

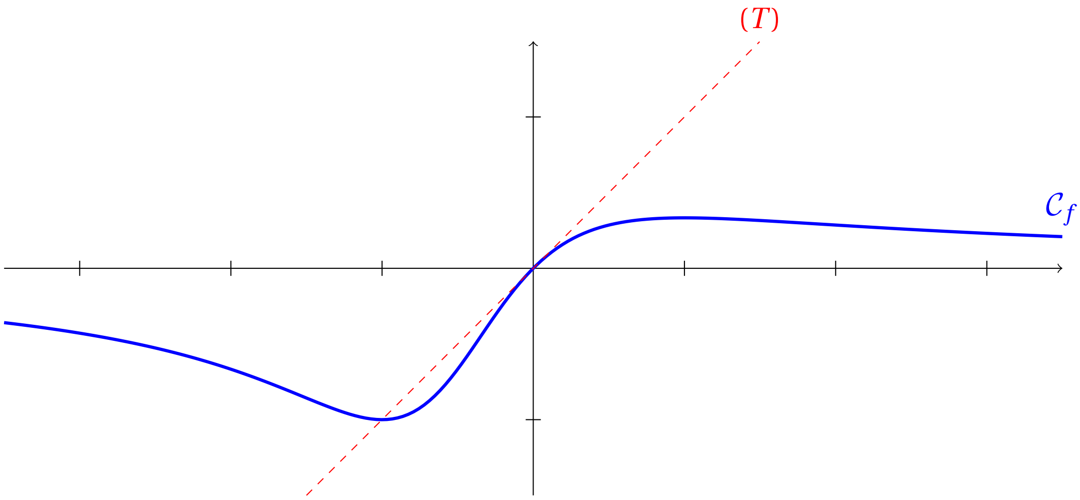
$$f(x) - x = \frac{-x^2(1+x)}{1+x+x^2} \leqslant 0$$

En conclusion :

$$\forall x \in [-1,+\infty[\quad f(x) \leqslant x$$

Puisque la tangente (T) a pour équation $y = x$ d'après la question **4(a)**, ce résultat s'interprète graphiquement par le fait que la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ est située au-dessous de sa tangente (T) sur l'intervalle $[-1,+\infty[$.

5. Voici l'allure de $\mathcal{C}_f$ et (T) dans un repère orthonormé :



6. Voici le programme Python complété :

```
def f(x):
    y=x/(1+x+x**2)
    return y
u=1
n=1
while u>1/1000:
    u=f(u)
    n=n+1
print(n)
```

Exercice 6 –

1. (a) Calculons le discriminant du polynôme de degré 2 $x^2 - xe + e$:

$$\Delta = (-e)^2 - 4e \simeq 7,3 - 10,8 = -3,5 < 0\,.$$

Ainsi, le polynôme $x^2 - xe + e$ est toujours du signe de son coefficient dominant, i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 - xe + e > 0\,.$$

(b) Calculons le discriminant de P :

$$\Delta = (-2e)^2 - 4 \times 2 \times (e^2 - 2e) = 4e^2 - 8e^2 + 16e = -4e^2 + 16e = 4e(4-e) \simeq 14,04 > 0$$

L'équation $P(x) = 0$ admet donc deux racines distinctes :

$$\alpha = \frac{2e - \sqrt{4e(4-e)}}{4} \qquad \text{et } \beta = \frac{2e + \sqrt{4e(4-e)}}{4}\,.$$

On en déduit le tableau de signe de P :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. (a) Calculons :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1-\ln(0^2-0\times e+e) = 1-\ln(e) = 1-1 = 0 \\ f(1) &= 1-\ln(1^2-1\times e+e) = 1-\ln(1-e+e) = 1-\ln(1) = 1 \\ f(e-1) &= 1-\ln((e-1)^2-(e-1)e+e) = 1-\ln(1) = 1 \\ f(e) &= 1-\ln(e^2-e^2+e) = 1-\ln(e) = 1-1 = 0 \end{aligned}$$

Enfin,

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = 1-\ln\left(\frac{e^2}{4}-\frac{e^2}{2}+e\right) = 1-\ln\left(e\left(1-\frac{e}{4}\right)\right) = 1-\ln(e)-\ln\left(1-\frac{e}{4}\right) = -\ln\left(1-\frac{e}{4}\right)$$

Procédons désormais au calcul des limites. On a $x^2-xe+e = x\left(x-e+\frac{e}{x}\right)$. Or,

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x-e+\frac{e}{x} = +\infty.$$

Donc, par produit $\lim_{x\to+\infty} x^2-xe+e = +\infty$. Par ailleurs, $\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc, par composition $\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2-xe+e) = +\infty$. Et donc, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. En procédant de la même manière, on obtient également $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(b) f est dérivable comme composée de fonctions dérivables (ln et un polynôme). Posons $u(x) = x^2-xe+e$. Alors, $u'(x) = 2x-e$. Et donc, pour tout réel x,

$$f'(x) = -\frac{2x-e}{x^2-xe+e} = \frac{e-2x}{x^2-xe+e}.$$

On a vu, à la question 1, que le dénominateur x^2-xe+e est toujours strictement positif. Par ailleurs, $e-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{e}{2}$. On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

On a :

$$f'(0) = \frac{e-2\times 0}{0^2-0\times e+e} = \frac{e}{e} = 1 \qquad \text{et} \qquad f'(e) = \frac{e-2\times e}{e^2-e^2+e} = \frac{-e}{e} = -1.$$

(c) Puisque $e \simeq 2,7$, on a $e-1 \simeq 1,7$ et $\frac{e}{2} \simeq 1,35$. Ainsi,

$$0 \leqslant 1 \leqslant \frac{e}{2} \leqslant e-1 \leqslant e.$$

On a donc le tableau de variations suivant pour f :

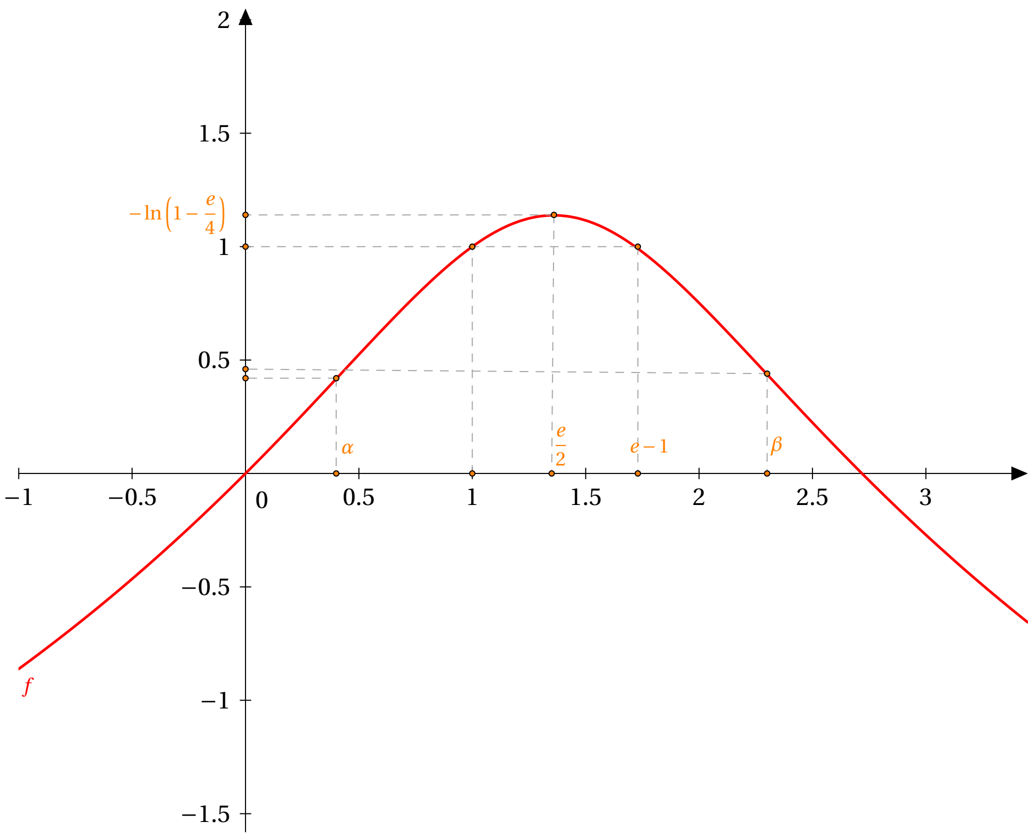
x	$-\infty$		0		1		$\frac{e}{2}$		$e-1$		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$				$+$			0			$-$			
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$-\ln\left(1-\frac{e}{4}\right)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. f' est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Posons $u(x) = e - 2x$ et $v(x) = x^2 - xe + e$. Alors, $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 2x - e$. Donc, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x^2 - xe + e) - (e - 2x)(2x - e)}{(x^2 - xe + e)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 2xe - 2e - 2xe + e^2 + 4x^2 - 2xe}{(x^2 - xe + e)^2} \\ &= \frac{2x^2 - (2e)x + e^2 - 2e}{(x^2 - xe + e)^2} \\ &= \frac{P(x)}{(x^2 - xe + e)^2}. \end{aligned}$$

Dès lors, $f''(x) = 0$, si et seulement si, $P(x) = 0$, si et seulement si, $x = \alpha$ ou $x = \beta$. Dès lors, les points d'inflexion de f sont $x = \alpha$ et $x = \beta$.

4. On a l'allure de courbe suivante :



Exercice 7 –

1. (a) $v_0 = u_1 + 2u_0 = -5 + 2 \times 4 = 3$ et $v_1 = u_2 + 2u_1 = 13 + 2 \times (-5) = 3$.
   Bilan : $\boxed{v_0 = 3 \text{ et } v_1 = 3}$

   (b) $v_{n+2} = u_{n+3} + 2u_{n+2}$. Or, $u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$ donc $v_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2} = 2u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_{n+1} - 2u_n = 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - (u_{n+1} + 2u_n) = 2v_{n+1} - v_n$.
   Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n}$

   (c) La suite (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique associée (E) est $r^2 = 2r - 1 \iff r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0$. Donc (E) admet une unique solution $r_0 = 1$. On sait alors qu'il existe λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (\lambda + \mu n)(r_0)^n$ *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda + \mu n$. En particulier, pour $n = 0$, on a $v_0 = 3 = \lambda$ et pour $n = 1$, on a $v_1 = 3 = \lambda + \mu$ donc $\lambda = 3$ et $\mu = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3$.

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3}$

(d) On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3$ donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite constante.

(e) Or, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $v_n = u_{n+1} + 2u_n$ et $v_n = 3$ donc $3 = u_{n+1} + 2u_n$ donc $u_{n+1} = -2u_n + 3$.

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3.}$

(f) La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. On cherche α tel que $\alpha = -2\alpha + 3$ et on trouve $\alpha = 1$. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_n - 1$. Montrons que la suite (w_n) est géométrique : $w_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2w_n$. Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 1 = 4 - 1 = 3$ donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $w_n = 3(-2)^n$. Or, $w_n = u_n - 1$ donc $u_n = w_n + 1$ et donc $u_n = 3(-2)^n + 1$.

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3(-2)^n + 1}$

(g)

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \left(3(-2)^k + 1\right) = 3\sum_{k=0}^{n}(-2)^k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} + (n+1) = 1 - (-2)^{n+1} + n + 1$$

Bilan : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = n + 2 - (-2)^{n+1}.}$

2. (a) **Montrons par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$:**

Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : «$t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$.»

Initialisation $(n = 0)$

On a $t_0 = u_0 - (-2)^0 = 1$, $t_1 = u_1 - (-2)^1 = 0$ et $t_2 = u_2 - (-2)^2 = -1$. Ainsi $t_2 - 2t_1 + t_0 = -1 + 2 \times 0 + 1 = 0$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On doit donc montrer que $t_{n+3} - 2t_{n+2} + t_{n+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
t_{n+3} - 2t_{n+2} + t_{n+1} &= t_{n+3} - 2(2t_{n+1} - t_n) + t_{n+1}, \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= t_{n+3} - 3t_{n+1} + 2t_n \\
&= u_{n+3} - (-2)^{n+3} - 3(u_{n+1} - (-2)^{n+1}) + 2(u_n - (-2)^n) \\
&= u_{n+3} + 8(-2)^n - 3u_{n+1} - 6(-2)^n + 2u_n - 2(-2)^n \\
&= u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n \\
&= 0, \qquad \text{par définition de la suite } (u_n).
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion D'après la principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n, à savoir :

$$t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0.$$

(b) La suite $(t_n)_n$ étant une suite récurrence linéaire d'ordre 2, on calcule les racines de son équation caractéristique.

$$(E) : \qquad r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0.$$

(E) possède donc une racine double $r_0 = 1$. Le terme général de la suite a donc pour expression :

$$t_n = (\lambda + n\mu)1^n = \lambda + n\mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Déterminons les réels λ et μ, on a $t_0 = 1 = \lambda$ et $t_1 = 0 = \lambda + \mu$. Ainsi $\mu = -\lambda = -1$.

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 1 - n.}$

(c) On sait que $u_n = t_n + (-2)^n$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - n + (-2)^n.}$

(d) Calculons la somme, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (1 - k + (-2)^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (-2)^k, \qquad \text{par linéarité de la somme} \\
&= n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} \\
&= \frac{-n^2 + n + 2}{2} + \frac{1-(-2)^{n+1}}{6} \\
&= \frac{-3n^2 + 3n + 8 + (-2)^{n+2}}{6}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{-3n^2 + 3n + 8 + (-2)^{n+2}}{6}.}$