DEVOIR SURVEILLÉ 2

Durée : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction !**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 5 pages, est constitué de 7 exercices. Bon courage !

Exercice 1 – Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$$

Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: : « u_n existe et $u_n \geqslant 1$ » est vraie.
2. Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Montrer par récurrence sur n que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 2$$
4. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$$
   (a) Justifier brièvement que la suite (w_n) est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique.
   (c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \neq 1$$
puis exprimer u_n en fonction de w_n.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2 –

1. Résoudre l'équation $\sin(2x) = \sin(3x)$ d'inconnue x réelle.
2. (a) Rappeler la formule d'addition du sinus : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b) = \dots$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la relation trouvée en 2.(b), montrer que si $\sin(2x) = \sin(3x)$, alors
   $$\sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$
   (d) À l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Exercice 3 – Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad f(x)f(y) = \sqrt{y}f(2x) + \sqrt{x}f(2y) \qquad (\star\star)$$

1. Dans toute cette question, on considère f une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$vérifiant la relation $(\star\star)$.
   (a) Vérifier que $f(0) = 0$.
   (b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x)^2 = 2\sqrt{x}f(2x)$.
   (c) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$f(x)f(y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left[y(f(x))^2 + x(f(y))^2\right]$$
   (d) Vérifier alors que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*$,
   $$(\sqrt{y}f(x) - \sqrt{x}f(y))^2 = 0$$
   (e) En déduire que la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$ est constante.
   (f) Montrer alors que f est la fonction nulle ou la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 2\sqrt{2x}$.
2. Conclure.

Exercice 4 – On considère l'application $f : \mathbb{C}\backslash\{i\} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{\bar{z}+i}$

1. Calculer l'image par f de 2 et de $1+i$, ainsi que leurs antécédents (on donnera tous les résultats sous forme algébrique).
2. (a) Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$, donner une interprétation géométrique.
   (b) Même question pour $f(z) \in i\mathbb{R}$, puis pour $f(z) \in \mathbb{U}$.
3. (a) Déterminer l'image par f de l'axe imaginaire pur (privé de i).
   (b) i. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f(x) + \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.
   ii. Montrer que tout $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $f\left(\dfrac{\cos(\theta)}{1-\sin(\theta)}\right) = -\dfrac{i}{2} + \dfrac{e^{i\theta}}{2}$.
   iii. En déduire que l'image par f de l'axe réel est le cercle de centre $A\left(-\frac{i}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privé de l'origine O.
   (c) Soit $z = e^{i\theta}$ $\left(\text{avec}\,\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\right)$, montrer que $f(z) = -\dfrac{i}{2} + \dfrac{1}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right)$. En déduire l'image par f du cercle trigonométrique privé de i.

Exercice 5 – Partie A

1. Justifier que l'équation $x^2+x+1=0$, d'inconnue réelle x, n'admet aucune solution.
   On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note $\left(\mathcal{C}_f\right)$ la courbe représentative de f.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de f.
   On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle $[-1,1]$.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au point d'abscisse 0 .
   (b) Montrer que pour tout réel x de $[-1,+\infty[$, on a : $f(x) \leqslant x$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
5. Tracer l'allure de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et (T) dans un repère orthonormé.
   On soignera en particulier la position de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ par rapport à (T).

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1=1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}=f\left(u_n\right)=\frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}$$

1. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$$

   En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.
4. Recopier et compléter le script du programme Python suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leqslant 1/1000$.

```
def f(x):
    y=x/(1+x+x**2)
    return y
u=.....
n=.....
while u.....
    u=.....
    n=.....
print(.....)
```

Exercice 6 – Dans tous les calculs et expressions, la lettre « e » désigne l'exponentielle de 1, et non la fonction exponentielle. On rappelle que : $\mathrm{e} \approx 2,7$.

1. (a) Montrer que, pour tout réel x,
$$x^2 - x\mathrm{e} + \mathrm{e} > 0$$
   (b) On note, pour tout réel x,
$$P(x) = 2x^2 - (2\mathrm{e})x + \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}$$
   Calculer les racines de P, notées α et β, et en déduire le signe de $P(x)$ en fonction des différentes valeurs de x.

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 1 - \ln\left(x^2 - x\mathrm{e} + \mathrm{e}\right)$$
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. (a) Calculer $f(0), f(1), f(\mathrm{e}-1)$ et $f(\mathrm{e})$. Vérifier que
$$f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}}{4}\right)$$
   Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Calculer $f'(x)$, puis étudier son signe. Vérifier que $f'(0) = 1$ et $f'(\mathrm{e}) = -1$.
   (c) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les valeurs étudiées à la question **2(a)**.
3. Vérifier que
$$f''(x) = \frac{P(x)}{\left(x^2 - x\mathrm{e} + \mathrm{e}\right)^2}$$
   et en déduire les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
4. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 5 cm , en faisant figurer les résultats obtenus aux questions précédentes. (on donne : $f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) \approx 1,1;\quad \alpha \approx 0,4;\quad \beta \approx 2,3$)

Exercice 7 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3) –

1. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \quad u_1 = -5 \quad u_2 = 13 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

   (a) Calculer v_0 et v_1.

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.

   (c) Déterminer l'expression de la suite (v_n).

   (d) En déduire que la suite (v_n) est constante.

   (e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$.

   (f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3(-2)^n + 1$.

2. Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad u_1 = -2 \quad u_2 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

   Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = u_n - (-2)^n$.

   (a) Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$$

   (b) Déterminer alors l'expression de t_n en fonction de n.

   (c) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - n + (-2)^n$.