CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 1

Exercice 1 –

1. - $A = 4\sqrt{4\times 6} - 5\sqrt{16\times 6} + 4\sqrt{9\times 6} = 8\sqrt{6} - 20\sqrt{6} + 12\sqrt{6} = 0.$
   - $B = \dfrac{x^{15}\times x^2}{x^{-3}} = \dfrac{x^{17}}{x^{-3}} = x^{20}$
   - $C = \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} + \dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \dfrac{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \dfrac{8}{1-3} = -4.$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, multiplions par la quantité conjuguée, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

Exercice 2 –

1. non$A$ est l'assertion : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \left(x \geqslant y \text{ OU } y \geqslant x+1\right).}$

   Montrons que non$A$ est vraie.

   Posons $x = 0$. Soit $y \in \mathbb{N}$ quelconque. On distingue deux cas :
   - si $y = 0$, alors $x \geqslant y$ donc $x \geqslant y$ OU $y \geqslant x+1$ est vraie.
   - si $y > 0$, puisque y est entier, on a $y \geqslant 1$ donc $y \geqslant x+1$, donc $x \geqslant y$ OU $y \geqslant x+1$ est vraie.

   Donc, par disjonction de cas, non$A$ est vraie et donc $\boxed{A \text{ est fausse.}}$
2. non$B$ est l'assertion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 \neq y^3.}$

   Montrons que B est vraie. On pose $x = 1$ et $y = 1$. Alors $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $x^2 = 1 = y^3$. $\boxed{\text{Donc } B \text{ est vraie.}}$
3. non$C$ est l'assertion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \left(y > x \text{ ET } y^2 \geqslant x^2\right).}$

   Montrons que non$C$ est vraie.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = |x|+1$. Alors $y \in \mathbb{R}$. On a $y \geqslant x+1 > x$ et $y^2 = |x|^2 + 2|x| + 1 \geqslant |x^2| \geqslant x^2$.
   $\boxed{\text{Donc non} C \text{ est vraie et } C \text{ est fausse.}}$
4. non$D$ est l'assertion $\boxed{\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \left(x < 0 \text{ ET } x \geqslant e^y\right).}$

   D est vraie. Prouvons-le par disjonction de cas sur x.

   Soient x et y dans $\mathbb{R}$. Si $x \geqslant 0$, alors $x \geqslant 0$ OU $x < e^y$ est vraie.

   Si $x < 0$, alors $e^y > 0 > x$, donc $x \geqslant 0$ OU $x < e^y$ est vraie. Donc, par disjonction de cas, $\boxed{D \text{ est vraie.}}$

Exercice 3 –

1. $\boxed{\text{« Si l'entier } n \text{ est impair, alors l'entier } n^2-1 \text{ est divisible par 4. »}}$
2. Supposons que l'entier n est impair. Alors, il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Considérons un tel k. On a :

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2+k).$$

   Puisque k^2+k est un entier, $4(k^2+k)$ est divisible par 4 donc n^2-1 est divisible par 4. On a montré que :

$$\boxed{\text{Si l'entier } n \text{ est impair, alors l'entier } n^2-1 \text{ est divisible par 4.}}$$

3. La contraposée a la même valeur de vérité que l'implication de départ donc

$$\boxed{\text{l'assertion de départ est vraie.}}$$

Exercice 4 –

1. Équation (E_1).
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}|x-1| = |3-x| &\iff x-1 = 3-x \text{ Ou } x-1 = x-3\\ &\iff 2x = 4 \text{ Ou } -1 = -3\\ &\iff x = 2\end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{2\}.}$

2. Inéquation (E_2).
   On procède par disjonction de cas.
   - résolution sur $]-\infty;1[$. Soit $x \in]-\infty;1[$. On a :

$$|x-1|+|3-x| > 7 \iff -x+1+3-x > 7 \iff -2x > 3 \iff x < -\frac{3}{2}$$

     L'inéquation est donc vérifiée sur $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$.
   - résolution sur $[1;3]$. Soit $x \in [1;3]$. On a :

$$|x-1|+|3-x| > 7 \iff x-1+3-x > 7 \iff 2 > 7$$

     Ceci n'est pas possible donc l'inéquation n'est pas vérifiée sur $[1;3]$.
   - résolution sur $]3;+\infty[$. Soit $x \in]3;+\infty[$. On a :

$$|x-1|+|3-x| > 7 \iff x-1+x-3 > 7 \iff 2x > 11 \iff x > \frac{11}{2}$$

     Or, $\frac{11}{2} > 3$. Ainsi, l'inéquation est vérifiée sur $\left]\frac{11}{2};+\infty\right[$.
   - Bilan.
     L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\bigcup \left]\frac{11}{2};+\infty\right[.}$

3. Équation (E_3).
   Le terme $\sqrt{2-x}$ est défini si et seulement si $2-x \geqslant 0$, donc si et seulement si $x \leqslant 2$.
   Si x est un réel dans $]-\infty,-1[$, alors $\sqrt{2-x} > 0$ et $x+1 < 0$. Donc l'équation n'a pas de solution sur $]-\infty,-1[$.
   Soit $x \in [-1;2]$. Puisque $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff \left(2-x = (x+1)^2\right)\\ &\iff 2-x = x^2+2x+1\\ &\iff x^2+3x-1 = 0\\ &\iff x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ Ou } x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\end{aligned}$$

Or, on a $\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} < \dfrac{-3}{2} < -1$ et $9 < 13 < 16$ donc $3 < \sqrt{13} < 4$ d'où

$$0 = \frac{-3+3}{2} < \frac{-3+\sqrt{13}}{2} < \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\boxed{\mathcal{S}_3 = \left\{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}.}$

4. Les termes de l'équation (E_4) sont bien définis si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \leqslant 2 &\iff \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} \leqslant \frac{2x(x+1)}{x(x+1)} \\
&\iff \frac{x+1+x-2x(x+1)}{x(x+1)} \leqslant 0 \\
&\iff \frac{-2x^2+1}{x(x+1)} \leqslant 0 \\
&\iff -2 \times \frac{x^2-\frac{1}{2}}{x(x+1)} \leqslant 0
\end{aligned}$$

On construit le tableau de signes de l'expression de gauche :

x	$-\infty$		-1		$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$x^2-\frac{1}{2}$		+		+	0	−		−	0	+	
$x(x+1)$		+	0	−		−	0	+		+	
$-2 \times \frac{x^2-\frac{1}{2}}{x(x+1)}$		−	‖	+	0	−	‖	+	0	−	

On en conclut que l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_4 = \left]-\infty;-1\right[\bigcup \left[\frac{-1}{\sqrt{2}};0\right[\bigcup \left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right[.}$$

Exercice 5 –

1. Raisonnons par récurrence.

Pour tout entier naturel n, on considère la propriété P_n : « $u_n = 2^{n+2} - 3$ ».

Initialisation : $2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1$ et $u_0 = 1$ donc $u_0 = 2^{0+2} - 3$ et donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé.

Supposons que la propriété P_n est vraie.

On a $u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2(2^{n+2} - 3) + 3 = 2^{n+3} - 6 + 3 = 2^{(n+1)+2} - 3$ donc la propriété P_{n+1} est vraie.

Par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+2} - 3.}$

2. Raisonnons par récurrence.

Pour tout entier $n \geqslant 6$, on considère la propriété P_n : « $2^n \geqslant (n+2)^2$.»

Initialisation : $2^6 = 64$ et $(6+2)^2 = 64$ donc $2^6 \geqslant (6+2)^2$ donc $\underline{P_6 \text{ est vraie.}}$

Hérédité : Soit un entier $n \geqslant 6$ fixé.

On suppose que P_n est vraie, à savoir $2^n \geqslant (n+2)^2$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2(n+2)^2.$$

Or, $2(n+2)^2 - (n+3)^2 = 2(n^2+4n+4) - (n^2+6n+9) = n^2+2n-1$.
Les deux racines de ce trinôme sont $n_1 = -1-\sqrt{2}$ et $n_2 = -1+\sqrt{2}$. Ces deux racines sont inférieures à 6 et le coefficient dominant du polynôme est positif, donc $n^2+2n-1 \geqslant 0$.
On obtient ainsi $2(n+2)^2 - (n+3)^2 \geqslant 0$ et donc $2(n+2)^2 \geqslant (n+3)^2$.
Finalement,

$$2^{n+1} \geqslant 2(n+2)^2 \geqslant \big((n+1)+2\big)^2$$

et $\underline{P_{n+1} \text{ est vraie.}}$

$$\boxed{\text{Par récurrence : } \forall n \geqslant 6,\ 2^n \geqslant (n+2)^2}$$

Exercice 6 –

1. Soient a et b deux réels positifs. Un carré étant toujours positif, on a :

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$$

D'où en développant le carré,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0$$

C'est-à-dire,

$$2\sqrt{ab} \leqslant a + b$$

2. Soient a, b et c trois réels positifs. D'après la question précédente, on a

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$a + c \geqslant 2\sqrt{ac}$$

$$b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$$

Les différents membres de ces inégalités étant tous positifs, on peut multiplier ces trois inégalité. Cela donne :

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

C'est-à-dire,

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$$

Exercice 7 –

1. (a) Soient x et y des réels. Alors, $f_1(x) = x$ et $f_1(y) = y$, donc

$$\left|f_1(x) + f_1(y)\right| = \left|x + y\right|.$$

Donc $\boxed{f_1 \text{ vérifie bien } (E).}$

(b) Soient x et y des réels. Alors, $f_2(x) = -x$ et $f_2(y) = -y$, donc

$$\left|f_2(x) + f_2(y)\right| = \left|-x-y\right| = \left|-(x+y)\right| = \left|x+y\right|.$$

Donc $\boxed{f_2 \text{ vérifie bien } (E).}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,
$$f(x) = |x| \Longleftrightarrow \big(f(x) = x \text{ OU } f(x) = -x\big).$$
D'où, $\boxed{\big(\forall x \in \mathbb{R}, \big|f(x)\big| = |x|\big) \Longleftrightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R}, \big[f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x\big]\big).}$

3. (a) Pour $x = 0$ et $y = 0$, on obtient :
$$\begin{aligned}\big|f(0) + f(0)\big| &= |0+0| \\ \big|2f(0)\big| &= |0| \\ 2\big|f(0)\big| &= 0\end{aligned}$$
Donc $\boxed{f(0) = 0.}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, comme $f(0) = 0$,
$$\begin{aligned}\big|f(x) + f(0)\big| &= |x+0| \\ \big|f(x) + 0\big| &= |x| \\ \big|f(x)\big| &= |x|\end{aligned}$$
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \big|f(x)\big| = |x|$.

   (c) i. La négation demandée est
$$\boxed{\big(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x\big) \text{ Et } \big(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -x\big).}$$

   ii. Comme f vérifie $\big(\forall x \in \mathbb{R}, \big|f(x)\big| = |x|\big)$ (question 3.b), en utilisant la question 2, on en déduit que f vérifie $\big(\forall x \in \mathbb{R}, \big[f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x\big]\big)$
   Supposons que $\big(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x\big)$ Et $\big(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -x\big)$.
   On note x un réel tel que $f(x) \neq x$ et y un réel tel que $f(y) \neq -y$.
   Comme $f(x) = x$ Ou $f(x) = -x$ et $f(x) \neq x$, on obtient que $f(x) = -x$.
   De même, $f(y) = y$ Ou $f(y) = -y$ et $f(y) \neq -y$, donc $f(y) = y$.
   Comme f vérifie (E), on a $\big|f(x) + f(y)\big| = \big|x+y\big|$. Donc $\big|-x+y\big| = \big|x+y\big|$. Deux nombres ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.
   • Si $-x+y = x+y$, alors $-x = x$ donc $x = 0$. Donc $f(0) = 0$ (par quest. 3.a). Or $f(x) \neq x$, donc ceci fournit une contradiction.
   • Si $-x+y = -(x+y)$, alors $y = -y$ donc $y = 0$. Donc $f(0) = 0$ (par quest. 3.a). Or $f(y) \neq -y$, donc ceci fournit une contradiction.
   On en déduit que notre hypothèse est fausse, et donc que sa négation est vraie, c'est-à-dire que
$$\big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x\big) \text{ Ou } \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x\big).$$
   Autrement dit, $\boxed{f \text{ est forcément la fonction } f_1 \text{ ou la fonction } f_2.}$

4. On procède par analyse synthèse.
   La question 3 réalise l'analyse et montre que les fonctions f_1 et f_2 sont les seules fonctions candidates à vérifier (E).
   La synthèse a été réalisée dans la question 1, où l'on a montré que f_1 et f_2 vérifient (E).
   Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des fonctions vérifiant } (E) \text{ est } \{f_1, f_2\}.}$