DEVOIR SURVEILLÉ 1

Durée : 2h

Les documents, la calculatrice et tout matériel éléctronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 2 pages, est constitué de 7 exercices. Bon courage!

Exercice 1 –

1. Simplifier au maximum les nombres suivants :
   - $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$
   - $B = \dfrac{\left(x^3\right)^5 \times x^2}{x^2 \times x^{-5}}$
   - $C = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

Exercice 2 – Pour chacune des assertions qui suivent :

1. Écrire la négation.
2. Déterminer si l'assertion est vraie ou fausse. Si l'assertion est vraie, on en fera la démonstration. Si l'assertion est fausse, on démontrera que la négation est vraie.

A : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x < y < x+1.$ »

B : « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 = y^3.$ »

C : « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \left(y > x \Longrightarrow y^2 < x^2\right).$ »

D : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \left(x \geqslant 0 \text{ OU } x < \mathrm{e}^y\right).$ »

Exercice 3 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'assertion suivante :

« Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 4, alors l'entier n est pair. »

1. Écrire la contraposée de cette assertion.
2. Montrer que cette contraposée est vraie.
3. Que conclure quant à la valeur de vérité de l'assertion de départ? (expliquer sommairement)

Exercice 4 – Résoudre les équations ou inéquations d'inconnue réelle x suivantes :

(E_1) $|x-1| = |3-x|$ $\qquad$ (E_2) $|x-1|+|3-x| > 7$

(E_3) $\sqrt{2-x} = x+1$ $\qquad$ (E_4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1} \leqslant 2.$

Exercice 5 –

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^{n+2} - 3$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 6$, on a $2^n \geqslant (n+2)^2$.

Exercice 6 –

1. Montrer que pour tous réels a et b positifs, on a :
$$2\sqrt{ab} \leqslant a+b$$
2. En déduire que pour tous réels a, b et c positifs, on a :
$$(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$$

Exercice 7 – Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \left|f(x)+f(y)\right| = \left|x+y\right|. \qquad (E)$$

1. (a) On définit $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$. Montrer que f_1 vérifie (E).
   (b) On définit $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$. Montrer que f_2 vérifie (E).
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\big(\forall x \in \mathbb{R}, \left|f(x)\right| = |x|\big) \Longleftrightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R}, \left[f(x) = x \text{ Ou } f(x) = -x\right]\big).$$
3. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).
   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \left|f(x)\right| = |x|$.
   (c) i. Écrire la négation de
$$\big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x\big) \text{ Ou } \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x\big).$$
   ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que
$$\big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x\big) \text{ Ou } \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x\big).$$
4. Conclure. On précisera bien le raisonnement utilisé.