CORRIGÉ CONCOURS BLANC

Exercice 1 –

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Alors,

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{S}_m &\iff x^2+y^2+z^2-2x-2y-4+2m(-x+y-2z-3)=0\\
&\iff x^2-2(1+m)x+y^2-2(1-m)y+z^2-2(2m)z-4-6m=0\\
&\iff (x-(1+m))^2+(y-(1-m))^2+(z-2m)^2\\
&\qquad -(1+m)^2-(1-m)^2-4m^2-4-6m=0\\
&\iff (x-(1+m))^2+(y-(1-m))^2+(z-2m)^2=6m^2+6m+6
\end{aligned}$$

Le trinôme du second degré $6m^2+6m+6$ a un discriminant $\Delta=-108<0$ et un coefficient dominant positif donc est toujours strictement positif.

Ainsi, $\mathcal{S}_m$ est bien une sphère, de centre $C_m(1+m,1-m,2m)$ et de rayon $R_m=\sqrt{6m^2+6m+6}$.

2. Pour tout $m\in\mathbb{R}$, $C_m = A+m\overrightarrow{u}$ où A est le point de coordonnées $(1,1,0)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(1,-1,2)$. Ainsi, l'ensemble des points C_m est une droite, dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+m\\ y &=& 1-m\\ z &=& 2m\end{array}\right., \quad m\in\mathbb{R}.$$

3. Si m et m' sont deux réels distincts, alors C_m et C_m n'ont pas la même hauteur, donc $C_m \neq C_{m'}$.

Pour les rayons, il s'agit de résoudre $R_m = R_{m'}$. Par positivité vue à la question 1,

$$\begin{aligned}
R_m = R_{m'} &\iff 6m^2+6m+6 = 6m'^2+6m'+6\\
&\iff m^2+m-m'^2-m'=0\\
&\iff (m-m')(m+m')+(m-m')=0\\
&\iff (m-m')(m+m'+1)=0
\end{aligned}$$

Or, $m-m'$ est non-nul car $m\neq m'$, d'où $R_m=R_{m'} \iff m'=-1-m$.

Cela signifie qu'il y a toujours une autre sphère de la famille qui a le même rayon que $\mathcal{S}_m$, sauf lorsque $m=-1-m$, ce qui équivaut à $m=\dfrac{-1}{2}$.

4. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Si M appartient à $\mathcal{S}_m$ et $\mathcal{S}_{m'}$ pour m et m' distincts, alors (x,y,z) vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-2x-2y-4+2m(-x+y-2z-3)=0\\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-4+2m'(-x+y-2z-3)=0.\end{array}\right.$$

En faisant la différence de ces deux équations et comme $m\neq m'$, on obtient

$$-x+y-2z-3=0,$$

ce qui est l'équation d'un plan $\mathcal{P}$. On va donc se contenter de chercher les points communs à toutes les sphères dans ce plan.

$$\begin{aligned}
\forall m\in\mathbb{R}, M\in\mathcal{S}_m &\iff \left\{\begin{array}{c}\forall m\in\mathbb{R}, M\in\mathcal{S}_m\\ -x+y-2z-3=0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2-2x-2y-4=0\\ -x+y-2z-3=0\end{array}\right.\\
&\iff M\in\mathcal{P}\cap\mathcal{S}_0
\end{aligned}$$

On est donc ramené à l'étude de l'intersection d'un plan et d'une sphère. On détermine la distance de C_0 à $\mathcal{P}$.

$$d(C_0,\mathcal{P}) = \frac{|-1+1-2\times 0-3|}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{6} = R_0$$

L'ensemble recherché est donc bien un cercle.
Son rayon est $\sqrt{R_0^2 - d(C_0,\mathcal{P})^2} = \sqrt{6-\frac{3}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.
Notons $B(a,b,c)$ le projeté orthogonal de C_0 sur $\mathcal{P}$ (c'est le centre de cercle que nous cherchons). Alors, $\overrightarrow{C_0B}(a-1,b-1,c)$ est colinéaire à $\vec{n}(-1,1,-2)$, vecteur normal au plan. C'est-à-dire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $(a-1,b-1,c) = \lambda(-1,1,-2)$ c'est-à-dire $(a,b,c) = (1-\lambda, 1+\lambda, -2\lambda)$. Or, $B\in\mathcal{P}$, donc ses coordonnées doivent vérifier l'équation du plan et on a

$$-(1-\lambda)+(1+\lambda)+4\lambda-3 = 0,$$

ce qui donne $\lambda = \frac{1}{2}$ et donc $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)$. Finalement, l'ensemble des points communs à toutes les sphères $\mathcal{S}_m$ est le cercle $\mathcal{C}$

$\boxed{\text{de centre } B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right), \text{ de rayon } \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{ dans le plan } \mathcal{P}: -x+y-2z-3.}$

5. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.
Si M n'appartient pas à $\mathcal{P}$, alors $-x+y-2z-3\neq 0$, donc pour le paramètre

$$m = \frac{x^2+y^2+z^2-2x-2y-4}{-2(-x+y-2z-3)},$$

on a que $M\in\mathcal{S}_m$.
Si M appartient à $\mathcal{P}$, alors, d'après le raisonnement mené à la question précédente, l'intersection de toute sphère $\mathcal{S}_m$ avec $\mathcal{P}$ est le cercle $\mathcal{C}$. Ainsi, les points hors du cercle ne sont sur aucune sphère $\mathcal{S}_m$.

$\boxed{\text{L'ensemble des points n'appartenant à aucune sphère } \mathcal{S}_m \text{ est } \mathcal{P}\setminus\mathcal{C}.}$

6. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Alors

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{P}_m &\iff \overrightarrow{C_mM}\perp\overrightarrow{OC_m} \\ &\iff \overrightarrow{C_mM}\cdot\overrightarrow{OC_m} = 0 \\ &\iff (x-1-m)(1+m)+(y-1+m)(1-m)+(z-2m)2m = 0 \\ &\iff (1+m)x+(m-1)y+2mz-2-6m^2 = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{(1+m)x+(1-m)y+2mz-2-6m^2 = 0 \text{ est une équation de } \mathcal{P}_m.}$

7. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Alors

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{P}_0\cap\mathcal{P}_{-1}\cap\mathcal{P}_1 &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 2\\ 2x+2z &=& 8\\ -2y-2z &=& 8 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 2\\ 2x+2z &=& 8\\ 2x-2y &=& 16 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 2\\ 2x+2z &=& 8\\ 0 &=& 12 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ce système n'a pas de solutions. Ainsi, $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{-1}, \mathcal{P}_1$ n'ont pas de point en commun, donc a fortiori,

$\boxed{\text{il n'existe aucun point appartenant à tous les plans } \mathcal{P}_m.}$

8. Soient m et m' deux réels distincts. On note $\overrightarrow{v_m}(1+m, m-1, 2m)$ un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$ et $\overrightarrow{v'_m}(1+m', m'-1, 2m')$ un vecteur normal à $\mathcal{P}'_m$.

   Alors $\overrightarrow{v_m} \wedge \overrightarrow{v'_m}$ a pour coordonnées $(2(m'-m), 2(m-m'), (2m-m')$. Comme $m-m'$ est non-nul, on en déduit que ce vecteur n'est pas nul et donc que les plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}'_m$ ne sont parallèles. Leur intersection est donc bien une

$$\boxed{\text{droite, dirigée par } \frac{1}{2(m-m')}\overrightarrow{v_m} \wedge \overrightarrow{v'_m} \text{ de coordonnées } (-1,1,1).}$$

9. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace. Ce point appartient à l'un des plans $\mathcal{P}_m$ s'il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que $(1+m)x+(1-m)y+2mz-2-6m^2 = 0$, c'est-à-dire si l'équation $-6m^2+(x-y+2z)m+(x+y-2) = 0$ d'inconnue $m \in \mathbb{R}$ admet au moins une solution. Comme il s'agit d'un trinôme du second degré, c'est le cas si et seulement si son discriminant $\Delta_{x,y,z}$ est positif.

$$\begin{aligned}\Delta_{x,y,z} &= (x-y+2z)^2 + 24(x+y-2)\\ &= x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz+24x+24y-48\end{aligned}$$

   Ainsi,

   $\boxed{\mathcal{G} \text{ a pour inéquation } x^2+y^2+4z^2-2xy+4xz-4yz+24x+24y \geqslant 48}$ et il est facile de vérifier que $\boxed{O \notin \mathcal{G}.}$

   Avec l'aide de Geogebra, on peut observer qu'il s'agit d'une portion de l'espace délimitée par un cylindre parabolique.

Exercice 2 –
Préliminaires

1. On a, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{1}{5}u^5 + o\left(u^5\right)\\ (1+u)^\alpha &= 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o\left(u^2\right)\end{aligned}$$

2. La fonction $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ qui est un domaine symétrique. Notons par ailleurs que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right),$$

de sorte que,

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \exp\left(\frac{1}{-x}\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)\right) = \exp\left(\frac{-1}{x}\ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\times\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{-1}{x}\ln\left(\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = \exp\left(\frac{-1}{x}\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = f(x)\,.
\end{aligned}$$

Donc, f est bien une fonction paire.

Partie A

4. Notons tout d'abord que, pour x voisin de 0 :

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right)\right)$$

Posons alors $u = x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right)$. On a :

$$\begin{aligned}
u &= x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right)\\
u^2 &= \left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right)\right)^2 = x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x^5+o\left(x^5\right)\\
u^3 &= \left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right)\right)^3 = x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{3}{4}x^5+o\left(x^5\right)\\
u^4 &= \left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right)\right)^4 = x^4+2x^5+o\left(x^5\right)\\
u^5 &= \left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^5\right)\right)^5 = x^5+o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $u \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc, $u^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$. D'où, $o\left(u^5\right) = o\left(x^5\right)$.
De sorte que,

$$\begin{aligned}
\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) &\underset{x\to 0}{=} u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{1}{5}u^5+o\left(u^5\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}x^5\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3}{2}x^4+\frac{3}{4}x^5\right)\\
&\qquad -\frac{1}{4}\left(x^4+2x^5\right)+\frac{1}{5}x^5+o\left(x^5\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

qui est bien le résultat demandé.

5. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+o\left(x^5\right)\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{40}x^4+o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\times\exp\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{40}x^4+o\left(x^4\right)\right)
\end{aligned}$$

Posons $u = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o\left(x^4\right)$. On a $u \longrightarrow 0$ lorsque $x \longrightarrow 0$. Par ailleurs,

$$\exp(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^4\right)$$

Comme pour la question précédente, on a $o\left(u^4\right) = o\left(x^4\right)$. Par ailleurs,

$$u = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o\left(x^4\right)$$
$$u^2 = \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + o\left(x^4\right)\right)^2 = \frac{1}{36}x^4 + o\left(x^4\right)$$

De sorte que,

$$f(x) = \mathrm{e} \times \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + \frac{1}{72}x^4 + o\left(x^4\right)\right) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{6}x^2 + \frac{4\,\mathrm{e}}{45}x^4 + o\left(x^4\right)$$

6. f admet un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0, donc en particulier à l'ordre 0, et le terme d'ordre 0 est e. Donc, f est prolongeable par continuité en posant 0 en posant $f(0) = e$.
7. Ce prolongement est dérivable en 0 puisque f admet un développement limité à l'ordre 1. De plus, le terme d'ordre 1 dans le développement limité de f est nul, donc $f'(0) = 0$.
8. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. En utilisant le résultat de la question **2**, on obtient, pour tout $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times f(x) = \frac{f(x)}{x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)$$

d'où le résultat demandé en posant

9. (a) Déterminons le développement limité à l'ordre 3 de φ. En utilisant le résultat de la question **4**, on a :

$$\varphi(x) = x \times \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + o\left(x^3\right) = -\frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

(b) On a alors

$$f'(x) = f(x) \times \left(-\frac{1}{3}x + o(x)\right)$$

Or, il a été établi que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. D'où par produit de limites, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc, f' est continue en 0.
De plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Donc, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

10. Notons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. De plus, par composition et quotient de limites usuelles, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{x} = 0$.
Puis par composition avec la fonction exponentielle, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Par parité de f, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

11. (a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} \leqslant 0$$

Donc, φ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(b) On a $\varphi(0) = 0 - \ln(1) = 0$. De plus, φ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc

- $\forall x \leqslant 0, \quad \varphi(x) \geqslant 0$;
- $\forall x \geqslant 0, \quad \varphi(x) \leqslant 0$.

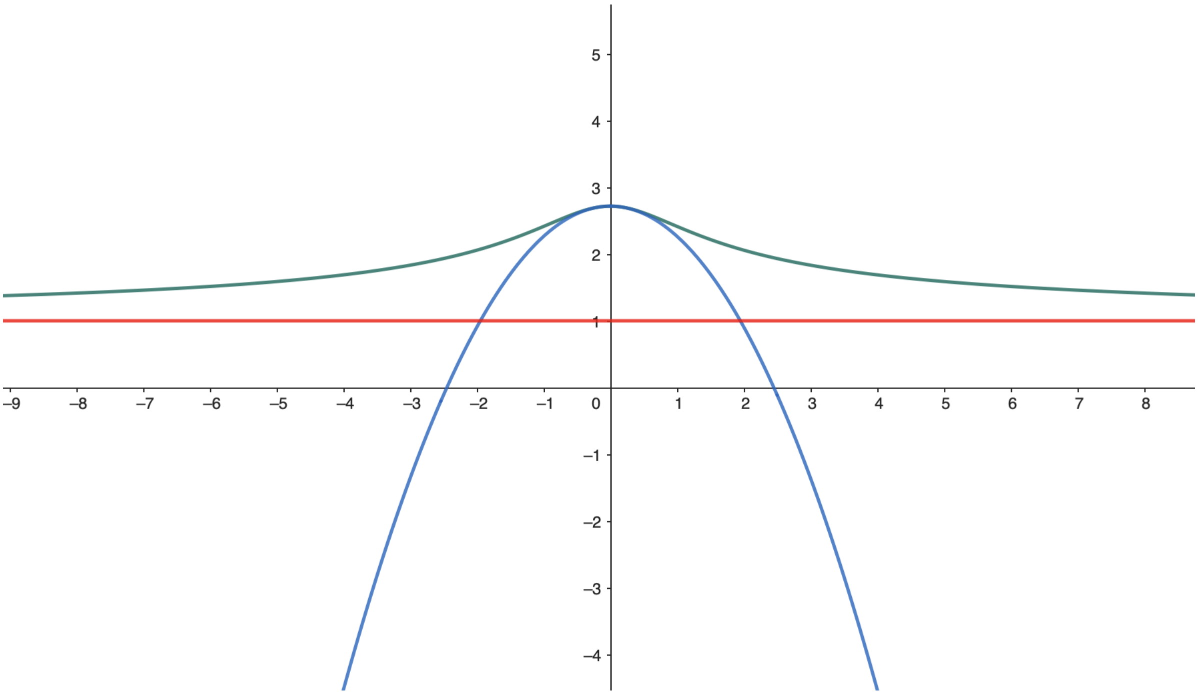
(c) On a vu à la question **8** que pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\varphi(x)$. Or, f est positive sur $\mathbb{R}^*$, donc f' est du signe de φ sur $\mathbb{R}^*$. Grâce à la question précédente, on en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	1

12. D'après le développement limité effectué à la question **9.(a)**, on a :

$$f(x) - \mathrm{e}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = +\frac{4\,\mathrm{e}}{45}x^4 + o\left(x^4\right) \geqslant 0$$

Donc, la courbe représentative de f se situe au dessus de la parabole d'équation $y = \mathrm{e}\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right)$ au voisinage de 0.
On obtient la courbe suivante, où la courbe représentative de f est tracée en vert, la parabole d'équation $y = \mathrm{e}\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right)$ est tracée en bleue, et la droite d'équation $y = 1$ (asymptote à la courbe en $\pm\infty$) est tracée en rouge :



Partie B

13. Rappelons le développement limité de f en 0, obtenu à la question **5** :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{6}x^2 + \frac{4\,\mathrm{e}}{45}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Par théorème de primitivation de développement limité, on a :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \mathrm{e}\,x - \frac{\mathrm{e}}{18}x^3 + \frac{4\,\mathrm{e}}{225}x^5 + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}\,x - \frac{\mathrm{e}}{18}x^3 + \frac{4\,\mathrm{e}}{225}x^5 + o\left(x^5\right)$$

De sorte que, pour $x \neq 0$:

$$H(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{18}x^2 + \frac{4\,\mathrm{e}}{225}x^4 + o\left(x^4\right)$$

14. En particulier, $\lim\limits_{x\to 0} H(x) = \mathrm{e} = f(0) = H(0)$.
Donc, H est continue en 0.

15. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ comme primitive d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, H est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, dont le dénominateur s'annule en 0.
De plus, H admet un développement limité à l'ordre 4 en 0, donc H est deux fois dérivable en 0 et on a :

$$H'(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad H''(0) = -\frac{e}{9}$$

16. (a) F étant la primitive de f qui s'annule en 0, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x = \frac{F(x)-F(0)}{x} = \frac{F(x)}{x} = H(x)$$

(b) Notons tout d'abord que pour $x = 0$, on a $H(x) = H(0) = f(0)$ et l'inégalité demandée est trivialement vérifiée.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (question **11.(c)**) donc en particulier f est décroissante sur $[0, x]$. Ainsi,

$$H(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x} \times x f(x) = f(x)$$

17. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad H'(x) = \frac{x f(x) - F(x)}{x}$$

Or, d'après la question précédente, $H(x) \geqslant f(x)$ donc $xH(x) \geqslant x f(x)$, d'où $F(x) \geqslant x f(x)$. En particulier, $H'(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et aussi sur $\mathbb{R}_+$ puisque $H'(0) = 0$). Ainsi, H est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 –

1. (a) A l'instant 0, la puce strouve sur le sommet 1. Ainsi, d'après les données de l'énoncé, à l'instant 1, la puce se trouve sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Autrement dit, la loi de X_1 est donnée par :

x	1	2	3	4
$P(X_1 = x)$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0

(b) On a :

$$E(X_1) = 1 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Et d'après le théorème de transfert,

$$E(X_1^2) = 1^2 \times \frac{2}{3} + 3^2 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

D'où, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{11}{3} - \frac{25}{9} = \frac{8}{9}$$

2. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $\big\{[X_1 = 1], [X_1 = 2], [X_1 = 3], [X_1 = 4]\big\}$:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]\big) + P\big([X_1 = 2] \cap [X_2 = 1]\big) + P\big([X_1 = 3] \cap [X_2 = 1]\big) + P\big([X_1 = 4] \cap [X_2 = 1]\big) \\ &= P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}[X_2 = 1] + P(X_1 = 3) \times P_{X_1=3}(X_2 = 1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 2]\big) + P\big([X_1 = 2] \cap [X_2 = 2]\big) + P\big([X_1 = 3] \cap [X_2 = 2]\big) + P\big([X_1 = 4] \cap [X_2 = 2]\big) \\ &= P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}[X_2 = 2] + P(X_1 = 3) \times P_{X_1=3}(X_2 = 2) \\ &= \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 3) &= P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 3]\big) + P\big([X_1 = 2] \cap [X_2 = 3]\big) + P\big([X_1 = 3] \cap [X_2 = 3]\big) + P\big([X_1 = 4] \cap [X_2 = 3]\big) \\ &= P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}[X_2 = 3] + P(X_1 = 3) \times P_{X_1=3}(X_2 = 3) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 4) &= P\big([X_1 = 1] \cap [X_2 = 4]\big) + P\big([X_1 = 2] \cap [X_2 = 4]\big) + P\big([X_1 = 3] \cap [X_2 = 4]\big) + P\big([X_1 = 4] \cap [X_2 = 4]\big) \\ &= P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}[X_2 = 4] + P(X_1 = 3) \times P_{X_1=3}(X_2 = 4) \\ &= \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

En résumé, la loi de X_2 est donnée par :

x	1	2	3	4
$P(X_2 = x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$

3. (a) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Les évènements $[X_n = 1]$, $[X_n = 2]$, $[X_n = 3]$ et $[X_n = 4]$ forment un système complet d'évènements de probabilités non nulles. Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{n+1}=1) = P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)P(X_n)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)P(X_n=2)+P_{X_n=3}(X_{n+1}=1)P(X_n=3)+P_{X_n=4}$$

Or, d'après l'énoncé, $P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) = \dfrac{2}{3}$, $P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{X_n=3}(X_{n+1}=1) = P_{X_n=4}(X_{n+1}=1) = 0$. Ainsi,

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{2}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2).$$

(b) De même, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=2) &= \frac{1}{2}P(X_n=3)+\frac{1}{3}P(X_n=4);\\
P(X_{n+1}=3) &= \frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2);\\
P(X_{n+1}=4) &= \frac{1}{2}P(X_n=3)+\frac{2}{3}P(X_n=4).
\end{aligned}$$

(c) En reprenant les résultats des questions **1.(a)** et **2**, on a bien :

$$\begin{aligned}
P(X_1=1) &= \frac{2}{3} = \frac{2}{3}P(X_0=1)+\frac{1}{2}P(X_0=0);\\
P(X_1=2) &= 0 = \frac{1}{2}P(X_0=3)+\frac{1}{3}P(X_0=4);\\
P(X_1=3) &= \frac{1}{3} = \frac{1}{3}P(X_0=1)+\frac{1}{2}P(X_0=2);\\
P(X_1=4) &= 0 = \frac{1}{2}P(X_0=3)+\frac{2}{3}P(X_0=4),
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
P(X_2=1) &= \frac{4}{9} = \frac{2}{3}P(X_1=1)+\frac{1}{2}P(X_1=2);\\
P(X_2=2) &= \frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(X_1=3)+\frac{1}{3}P(X_1=4);\\
P(X_2=3) &= \frac{2}{9} = \frac{1}{3}P(X_1=1)+\frac{1}{2}P(X_1=2);\\
P(X_2=4) &= \frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(X_1=3)+\frac{2}{3}P(X_1=4).
\end{aligned}$$

Donc, les relations précédentes sont encore valables pour $n=1$ et $n=0$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements $[X_n = 1]$, $[X_n = 2]$, $[X_n = 3]$ et $[X_n = 4]$ forment un système complet d'évènements, et donc

$$P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4) = 1.$$

4. D'après les relations établies précédemment, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=1) &= \frac{2}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2);\\
P(X_{n+1}=2) &= \frac{1}{2}P(X_n=3)+\frac{1}{3}P(X_n=4);\\
P(X_{n+1}=3) &= \frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2).
\end{aligned}$$

Or,

$$P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1\,.$$

Donc,

$$P(D_n)=1-P(X_n=1)-P(X_n=2)-P(X_n=3)\,.$$

Et donc,

$$P(X_{n+1}=2)=-\frac{1}{3}P(X_n=1)-\frac{1}{3}P(X_n=2)+\frac{1}{6}P(X_n=3)+\frac{1}{3}\,.$$

Dès lors,

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}P(X_{n+1}=1)\\P(X_{n+1}=2)\\P(X_{n+1}=3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2)\\-\frac{1}{3}P(X_n=1)-\frac{1}{3}P(X_n=2)+\frac{1}{6}P(X_n=3)+\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2)\end{pmatrix}.$$

Or,

$$\begin{aligned}AU_n+B&=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&3&0\\-2&-2&1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P(X_n=1)\\P(X_n=2)\\P(X_n=3)\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2)\\-\frac{1}{3}P(X_n=1)-\frac{1}{3}P(X_n=2)+\frac{1}{6}P(X_n=3)+\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2)\end{pmatrix}\\&=U_{n+1}\,.\end{aligned}$$

5. (a) Posons $L=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}L=AL+B\ \Leftrightarrow\ &\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&3&0\\-2&-2&1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\\iff&\begin{cases}a=\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}b\\b=-\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c+\frac{1}{3}\\c=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\end{cases}\\\iff&\begin{cases}\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b=0\\\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}b-\frac{1}{6}c=\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+c=0\end{cases}\end{aligned}$$

On résout ce système par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases}\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b=0\\\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}b-\frac{1}{6}c=\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+c=0\end{cases}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_3+L_2}\begin{cases}\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b=0\\\frac{5}{6}b+\frac{5}{6}c=\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+c=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+L_1}\begin{cases}\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b & = 0\\ \frac{5}{6}b+\frac{5}{6}c = \frac{1}{3}\\ -b+c = 0\end{cases}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+\frac{6}{5}L_2}\begin{cases}\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b & = 0\\ \frac{5}{6}b+\frac{5}{6}c = \frac{1}{3}\\ +2c = \frac{2}{5}\end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases}a = \frac{3}{10}\\ b = \frac{1}{5}\\ c = \frac{1}{5}\end{cases}$$

Et donc, l'unique vecteur L qui vérifie $L = AL + B$ est $L = \begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

(b) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $U_n = A^n(U_0 - L) + B$ ».
Initialisation ($n = 0$) :
$A^0(U_0 - L) + L = I_3(U_0 - L) + L = U_0 - L + L = U_0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après ce qui précède, on sait que $L = AL + B$ et que $U_{n+1} = AU_n + B$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que $U_n = A^n(U_0 - L) + L$ donc on en déduit que :

$$U_{n+1} = AU_n + B = A\left(A^n(U_0 - L) + L\right) + B = A^{n+1}(U_0 - L) + AL + B = A^{n+1}(U_0 - L) + L.$$

Donc, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi, la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$ à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

6. (a) Calculons RQ :

$$RQ = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -5 & -5\\ -2 & -4 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix} = 10I_3.$$

Ainsi, R est inversible, et

$$R^{-1} = \frac{1}{10}Q = \begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}.$$

(b) Calculons $CR - RD$:

$$\begin{aligned}
CR - RD &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : « $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$ » .

Initialisation ($n = 0$) : $A^0 = I_3$ et $\left(\frac{1}{6}\right)^0 RD^0R^{-1} = 1 \times RI_3R^{-1} = RR^1 = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier quelconque dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'après ce qui précède, $CR = RD$ et R est inversible, donc $C = RDR^{-1}$. Par ailleurs, $C = 6A$ donc $A = \frac{1}{6}RDR^{-1}$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$, donc on en déduit que :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} = A^n \times A &= \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1} \times \frac{1}{6}RDR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{1}{6} \times RD^nR^{-1}RDR^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^nI_3DR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^{n+1}R^{-1}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et ainsi la proposition est héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}.$$

7. Calculons A^n grâce à la formule obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
U_n &= A^n(U_0 - L) + L \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$. Donc :

$$U = \lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on a vu à la question 1.(d) que $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 4) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \big(P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3)\big) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Exercice 4 –

1. **Un exemple -**

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on a :

   $$\begin{aligned}
   f(\lambda X + X') &= f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) \\
   &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\
   &= (\lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z \\
   &= (\lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z', \lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z', \lambda(x + y - 2z) + x' + y' - 2z') \\
   &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z')
   \end{aligned}$$

   L'application f est donc bien $\boxed{\text{linéaire}}$.

   (b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

   $$\begin{aligned}
   f \circ f(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) \\
   &= f(x + y - 2z, x + y - 2z, x + y - 2z) \\
   &= (x + y - 2z + x + y - 2z - 2(x + y - 2z), *, *) \\
   &= (0, 0, 0).
   \end{aligned}$$

   Cela signifie que $f \circ f$ est $\boxed{\text{l'endomorphisme nul de } \mathbb{R}^3}$.

(c) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff x+y-2z=0 \iff x=-y+2z$. Ainsi on trouve
$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{(-y+2z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(2,0,1)).$$
La famille $(-1,1,0),(2,0,1)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ par définition et libre car composée de deux vecteurs non-colinéaires. Ainsi c'est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Ker}(f)}$.
Comme la famille $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(1,0,0),f(0,1,0),f(0,0,1))\\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,1,1),(-2,-2,-2))\\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1)).\end{aligned}$$
La famille $((1,1,1))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ par définition et libre car composée d'un seul vecteur, qui est non-nul. Donc c'est une $\boxed{\text{base de } \mathrm{Im}(f)}$.

(d) On a $(1,1,1) = (-1,1,0)+(2,0,1)$. Ainsi $(1,1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $\mathrm{Vect}(1,1,1) \subset \mathrm{Ker}(f)$ car le noyau est un espace vectoriel. On a bien : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Remarque : On aurait aussi pu calculer $f(1,1,1)$ et vérifier que cela faisait bien $0_{\mathbb{R}^3}$ pour montrer que $(1,1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$.

(e) D'après la question 1.(c), on voit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. De plus la famille $((3,2,1))$ est génératrice de $\mathrm{Vect}((3,2,1))$ et libre car composée d'un unique vecteur, qui est non-nul. Donc cette famille est une base de $\mathrm{Vect}((3,2,1))$. Ainsi $\dim(\mathrm{Vect}((3,2,1))) = 1$. On obtient donc
$$\dim(\mathrm{Vect}((3,2,1))) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1+2 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$
Soit $u \in \mathrm{Vect}((3,2,1)) \cap \mathrm{Ker}(f)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(3,2,1) = (3\lambda,2\lambda,\lambda)$. De plus, $u \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ soit $f(3\lambda,2\lambda,\lambda) = (0,0,0)$ i.e. $(3\lambda+2\lambda-2\lambda, 3\lambda+2\lambda-2\lambda, 3\lambda+2\lambda-2\lambda) = (0,0,0)$. On en déduit que $3\lambda = 0$ puis que $u = (0,0,0)$. Ainsi on a montré que
$$\mathrm{Vect}((3,2,1)) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$$
Ainsi on a bien $\boxed{\mathrm{Vect}((3,2,1)) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3}$

2. **Un premier résultat -**

(a) Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. Ainsi
$$f(x) = f(f(a)) = f \circ f(a) = \theta(a) = 0_E.$$
Donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a ainsi montré que $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)}$.

(b) Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, on a $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_E\}$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 1$. De plus d'après ce qui précède et le théorème du rang
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(f)) \quad \text{i.e.} \quad 2\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 3.$$
On en déduit que
$$1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \frac{3}{2}$$
Ainsi on a bien $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1}$.

(c) Comme $x \in \mathrm{Im}(f)$ on en déduit que $\mathrm{Vect}(x) \subset \mathrm{Im}(f)$ (car $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel). De plus, comme x est un vecteur non-nul, on a $\dim(\mathrm{Vect}(x)) = 1 = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Im}(f).}$

(d) Comme $f(a) \neq 0_E$ alors $a \neq 0_E$ et donc $\dim(\text{Vect}(a)) = 1$. De plus d'après le théorème du rang
$$\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1.$$
Ainsi on en déduit que
$$\dim(\text{Vect}(a)) + \dim(\text{Ker}(f)) = 1 + 2 = 3 = \dim(E)$$
Soit $y \in \text{Vect}(a) \cap \text{Ker}(f)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda a$. De plus, $y \in \text{Ker}(f)$ donc $f(y) = 0_E$. Or $f(y) = f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda x$. On en déduit que $\lambda x = 0_E$. Comme $x \neq 0_E$ alors $\lambda = 0$ et donc $y = 0_E$. On a ainsi montré que
$$\text{Vect}(a) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$
On a donc bien $\boxed{\text{Vect}(a) \oplus \text{Ker}(f) = E}$.

3. **Un deuxième résultat -**

(a) Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente on a $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ et $\dim(\text{Im}(f)) \geqslant 1$. Ainsi d'après ce qui précède et le théorème du rang
$$\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - \dim(\text{Im}(f))$$
On en déduit que
$$1 \leqslant \dim(\text{Im}(f)) \leqslant 2 \text{ i.e. } \quad \dim(\text{Im}(f)) \in \{1, 2\}.$$

(b) On a toujours $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Par ailleurs, d'après le théorème du rang
$$\dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 2 = 2 = \dim(\text{Im}(f)).$$
Ainsi on a montré que $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)}$.

(c) Montrons que la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. Soit $\left(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2\right) \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E.$$
En appliquant f on obtient
$$\begin{aligned} f(0_E) &= f\left(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2\right) \\ &= \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_1 f\left(f(a_1)\right) + \mu_2 f\left(f(a_2)\right) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$
On obtient donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0_E$. Comme la famille (x_1, x_2) est une base de $\text{Im}(f)$, elle est libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En injectant cela dans $(\star)$, on obtient $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0_E$, ce qui nous donne pour les mêmes raisons que précédemment $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Ainsi la famille (a_1, a_2, x_1, x_2) est libre. De plus elle a $4 = \dim(E)$ éléments. C'est donc une $\boxed{\text{base de } E}$.

(d) Comme la famille (a_1, a_2) est une sous-famille de (a_1, a_2, x_1, x_2), elle est libre. C'est donc une base de $\text{Vect}(a_1, a_2)$. De plus (x_1, x_2) est une base de $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$. Donc (x_1, x_2) est une base de $\text{Ker}(f)$. En concaténant ces deux bases, on a obtenu une base de E (d'après la question précédente) donc on a bien $\boxed{\text{Vect}(a_1, a_2) \oplus \text{Ker}(f) = E}$.