CONCOURS BLANC

Durée : 4h

Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exos, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Soignez la rédaction!**
5. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet, comportant 4 pages, est constitué de 4 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Pour tout réel m, on définit l'ensemble $\mathcal{S}_m$ des points de l'espace vérifiant l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 + 2m(-x + y - 2z - 3) = 0$$

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_m$ est une sphère, dont on précisera le centre C_m et le rayon R_m.
2. Quel est l'ensemble des points C_m ? En donner une représentation paramétrique.
3. Deux sphères associées à des paramètres m et m' différents peuvent-elles avoir le même centre ? le même rayon ?
4. Montrer que l'ensemble des points de l'espace appartenant simultanément à toutes les sphères est un cercle $\mathcal{C}$, dont on précisera le centre, le rayon ainsi qu'une équation du plan le contenant.
5. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels ne passe aucune des sphères $\mathcal{S}_m$.
6. Donner, pour tout $m \in \mathbb{R}$, une équation du plan $\mathcal{P}_m$ passant par C_m et perpendiculaire à (OC_m).
7. Déterminer l'ensemble des points communs à tous les plans $\mathcal{P}_m$.
8. Montrer que si $m \neq m'$, alors $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{P}_{m'}$ est une droite $\mathcal{D}_m$ dont on donnera un vecteur directeur.
9. Déterminer une inéquation de $\mathcal{G}$, l'ensemble des points par lesquels passe au moins un des plans $\mathcal{P}_m$. Est-ce que $O \in \mathcal{G}$?

Exercice 2 – Soit f l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Préliminaires

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln(1+u)$ ainsi que le développement limité à l'ordre 2 de $(1+u)^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$, fixé).
2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
3. Prouver que f est une fonction paire.

Partie A

4. Prouver que : $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + o\left(x^5\right)$.
5. En déduire le développement l'ordre 4 de f en 0 .
6. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on notera f ce prolongement.
7. Justifier que f est dérivable en 0 , préciser $f'(0)$.
8. Montrer que : $\quad \forall x \neq 0, \quad f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\varphi(x) \quad$ où $\quad \varphi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
9. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de φ en 0.
   (b) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
10. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
11. (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$.
    (b) Calculer $\varphi(0)$. En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$.
    (c) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
12. Tracer le graphe de f. Préciser la position de la courbe par rapport à la parabole d'équation $y = e\left(1 - \dfrac{x^2}{6}\right)$ au voisinage de 0.

Partie B

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ nulle en 0 .

On définit la fonction H sur $\mathbb{R}^+$en posant : $H(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{F(x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

13. Déterminer le développement limité de H à l'ordre 4 au voisinage de 0.
14. Montrer que H est continue en 0 .
15. Montrer que H est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}^+$, préciser $H'(0)$ et $H''(0)$.
16. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
    (b) En déduire que $H(x) \geqslant f(x)$ pour tous les x de $\mathbb{R}^+$.
17. Étudier les variations de H sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 – Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet 1.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 0$), la puce se trouve sur le sommet 1, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$), la puce se trouve sur le sommet 2, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$), la puce se trouve sur le sommet 3, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$), la puce se trouve sur le sommet 4, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la puce à l'instant n et on a donc $P(X_0 = 1) = 1$.

1. (a) Déterminer la loi de X_1.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2)$$
   (b) Exprimer de même, pour tout entier $n \geqslant 2, P(X_{n+1} = 2)$, $P(X_{n+1} = 3), P(X_{n+1} = 4)$ en fonction de $P(X_n = 1), P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$ et $P(X_n = 4)$.
   (c) Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.
   (d) Que vaut pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme :
   $$P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\ ?$$
4. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. De plus, on pose : $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation :
   $$U_{n+1} = AU_n + B\,.$$
5. (a) Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant :
   $$L = AL + B\,.$$
   (b) établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :
   $$U_n = A^n(U_0 - L) + L\,.$$
6. On pose $C = 6A$. Soit R, D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :
   $$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer RQ. En déduire que R est inversible et donner R^{-1}, où R^{-1} désigne la matrice inverse de la matrice R.

(b) Calculer $CR - RD$.

(c) En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^n R^{-1}.$$

7. On admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$, est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer U et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 4)$.

Exercice 4 –

1. **Un exemple -** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, x + y - 2z, x + y - 2z)$$

(a) Vérifier que f est linéaire.

(b) Calculer $f \circ f$.

(c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(d) Vérifier que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(e) Montrer que

$$\mathrm{Vect}((3,2,1)) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$$

2. **Un premier résultat** - Dans cette question E est un espace vectoriel de dimension finie égale à 3.

Soit f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \theta$ (θ est l'endomorphisme nul).

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(b) En déduire que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

Il existe donc x un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$. Soit $a \in E$ tel que $x = f(a)$.

(c) Justifier que $\mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Im}(f)$.

(d) Montrer que

$$\mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$$

3. **Un deuxième résultat -** Dans cette question E est un espace vectoriel de dimension finie égale à 4.

Soit f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = \theta$.

(a) Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \in \{1, 2\}$.

Dans la suite on se place dans le cas $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

(c) Soit (x_1, x_2) une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $a_1 \in E$ et $a_2 \in E$ tels que $x_1 = f(a_1)$ et $x_2 = f(a_2)$. Montrer que (a_1, a_2, x_1, x_2) est une base de E.

(d) Montrer finalement que

$$\mathrm{Vect}(a_1, a_2) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$$